1932 № 7

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК
СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

IMPERIAL MYCOLOGICAL
17 MAR. 1933
INSTITUTE

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ · EXEMPLE DE CITATION
А. Г. Воробьев. Определение скорости воздушного судна при повороте ИМЕН, 1932, № 7, стр. 981.
A. Vorobïov. Détermination de la vitesse des dirigeables pendant le virage BAS-MN, 1932, № 7, p. 981 (en russe).

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Август 1932 г.

Непременный секретарь академик *В. Волгин*

Редактор издания академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

Технический редактор Г. А. Стратановский

Ученый корректор Е. Х. Исаева

Сдано в набор в июне 1932 г. — Подписано к печати 20 августа 1932 г.

172 (857—1028) стр. (28 фиг.) + 2 табл.

Формат бум. 72 × 110 см. — 11 9/8 печ. л. — 42 000 тип. зн. в печ. л. — Тираж 1950

Ленинград № 46795. — АНИ № 226. — Заказ № 1474

Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12

Прилагаемые стр. 831* и 832* по техническому недосмотру выпали из статьи Л. М. Миропольского, помещенной в № 6 ИМЕН 1932 г. (стр. 829), и подлежат включению в названную книгу, после стр. 830.

Les pages 831* et 832*, ci-jointes, ont été omises, par accident, de l'article de M. Miropolskij, imprimé au № 6 du Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, Classe des sc. mathém et natur., 1932, p. 829, et doivent être placées dans la dite publication immédiatement après la page 830.

Таблица 2

№ № по порядку	Место взятия проб	Химический состав							
		CaO	MgO	FeO	MnO	$CaCO_3$	$MgCO_3$	$FeCO_3$	$MnCO_3$
1	Рудник № 4 западн. борт, уступ 1-й (сверху)	4.81	36.0	3.01	0.084	8.58	75.29	4.88	0.14
2	Рудн. Ивановский (большая яма) нижний уступ между доломитами (восточн. борт) и рудным телом (западн. борт). . .	8.72	34.65	4.01	0.08	15.57	72.50	6.47	0.13
3	Золотова яма (№ 2) на перешейке между северной частью и южной в западн. борту	9.30	35.01	3.88	0.215	16.59	73.23	6.25	0.35
4	Г. Иркускан, линия 13-я, скважина 24, с глуб. 166—168 м	7.14	35.69	5.02	0.42	12.75	74.64	8.08	0.68
5	Г. Иркускан, планш. 108 к В от Тяжелого рудн. (2 и 3)	6.05	36.65	4.41	0.13	10.80	76.81	7.19	0.21
6	Г. Иркускан, п.з. 124 в окр. В. Буланского рудн. (1)	6.01	36.51	4.07	0.18	10.73	76.36	6.56	0.29

Из обзора данных этой таблицы можно считать предположение о присутствии магнезита в районе железорудных месторождений Бакала также подтвержденным, а отсюда и факт наличия магнезита для Бакала считать реальной действительностью. Дальнейшая проблема изучения магнезита упирается в решение следующего основного вопроса: насколько много магнезита в районе Бакальских месторождений, и может ли он иметь по качественному признаку здесь какое-либо промышленное значение? Чтобы подойти к решению поставленного вопроса я полагаю пока (до получения окончательных данных обработки материалов) необходимым кратко охарактеризовать условия его залегания в уже известных поверхностных частях месторождений. С этой стороны наиболее отчетливым является рудник № 4.

Здесь магнезит установлен в западном борту (посредине верхнего уступа) на границе между жилой диабаза и доломитом, где он образует мелкие, неправильно очерченные, вдающиеся в доломит, жилообразные участки, которые представляют собою как бы перекристаллизованные участки доло-

мита, совершенно иногда незаметно переходящие на периферии в плотный доломит. Макроскопически магнезит из этих мест представляет собою голокристаллическую крупнозернистую породу серого, слегка желтоватого цвета. Под микроскопом означенная порода состоит почти исключительно из отдельных, неправильно ограниченных, слегка удлиненных зерен магнезита, с ясно выраженной спайностью по ромбоэдру и плотно прижатых друг к другу. Оптическая их характеристика такая: N_o—1.702, N_e—1.513, $N_o - N_e$ 0.189. Величина же отдельных индивидуумов магнезита в шлифах колеблется от 0.8 до 0.1 см. При этом подмечается по мере приближения к доломиту постепенное уменьшение величины зерен. Но местами, однако, в пограничной зоне на фоне мелкозернистого доломита встречаются отдельные более крупные, удлиненные кристаллики магнезита. Все это как-будто указывает на факт постепенного перехода доломита в магнезит. На некотором удалении процесс магнетизации уже совершенно ступшевывается, и порода оказывается представленной исключительно мелкозернистым доломитом, а еще дальше — доломитизированным известняком.

Среди зерен магнезита нередко встречаются зерна слегка обохренные вдоль трещин спайности. Редко между зернами магнезита наблюдаются мелкие выделения кремня, кварца, представляющие собою последующие метасоматозы магнезита. В результате обзора получается впечатление следующего генетического процесса образования магнезита:

1) доломитизация известняков — переход известняков через доломитизированные известняки в доломиты и далее переход доломитов через магнезитизированные доломиты в магнезит по реакции:

$$2\ CaCO_3 + MgCO_3 = CaCO_3 \cdot MgCO_3 + CaCO_3 \text{ (в растворе)}$$

$$CaCO_3\ MgCO_3 + MgCO_3 = 2\ MgCO_3 + CaCO_3 \text{ (в растворе)}$$

и 2) последующее окремнение и сидеритизация магнезита.

При этом, я думаю, что процесс обогащения известняков магнезитом обязан гидротермальным растворам, с температурой примерно порядка 50—60°, поднимавшимся по премпнеральным трещинам сбросов еще до процесса сидеритизации, который позднее накладывался на процесс доломитизации и частью замещал получившиеся в итоге его продукты (доломиты и магнезиты) сидеритом.

На это указывают:

1) постепенный переход известняков через доломитизированные известняки в доломиты (на некотором расстоянии от месторождений магнезита),

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

FORTPFLANZUNG VON STÖRUNGEN IN INHOMOGENEN ISOTROPEN MEDIEN

Von V. IGNATOVSKIJ (W. v. Ignatowsky)

Einleitende Bemerkungen. § 1. Allgemeine Betrachtungen. Extremalen. Geodätische Kugel. § 2. Wellengleichung. Charackteristische Gleichung. Brechungsexponent. § 3. Einschränkende Bedingungen. Inhomogene isotrope Medien. § 4. Drei Dimensionen. Geodätische Koordinaten. Einführung der Funktion w. § 5. Bemerkungen zu der Funktion w. Spezielle Annahme. § 6. Vorbereitende Bemerkungen. § 7. Ableitung einiger Poissonscher Integrale. § 8. Zentralsymmetrischer Brechungsexponent. Berechnung von w. Grundkreis. Geschlossenen Extremalen. § 9. Untersuchung des Falles (7) § 5. § 10. Untersuchung des Falles (9) § 5. § 11. Integration der Differentialgleichung. § 12. Beispiel zu § 11. § 13. Einige Bemerkungen zu dem Vorhergehendem. § 14. Noch ein Beispiel. § 15. Potential. § 16. Krümmungsmass und allgemeine Bemerkungen. § 17. Übergang zu einer anderen Koordinatenzahl, resp. zu einer anderen Dimension.

Einleitende Bemerkungen. Wir denken uns eine Wellengleichung (Gleichung zweiter Ordnung) mit konstanten Koeffizienten gegeben. Wir können dann bekanntlich sofort folgende Schlüsse ziehen.

Es sei A Fig. 1, das Gebiet innerhalb welchem die Anfangsbedingungen ($t = 0$) gelten. Um nun das Moment t_1, in welchem die durch diese Anfangsbedingungen erzeugte Wirkung, im Punkte P_0 ansetzt zu bestimmen, ziehen wir um P_0 als Mittelpunkt, eine Kugel, deren Radius sich mit einer Konstanten Geschwindigkeit vergrössern soll.* Die Kugel quillt also gewissermassen auf und im Moment t_1, wo die Kugel E das Gebiet A berührt setzt die Wirkung in Punkte P_0 an.

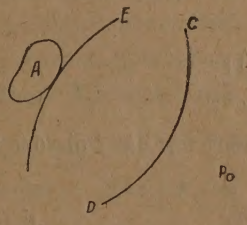


Fig. 1

Da nun aber die Begrenzung von A selbst eine Wellenfront darstellt, so legen wir, umgekehrt, um jeden Punkt dieser Begrenzung Kugeln mit

* Wir haben hier speziell die Gleichung (1) im Auge. Sind die konstanten Koeffizienten der Wellengleichung nicht gleich, so erhalten wir im allgemeinen Ellipsoide, was der Kristalloptik entspricht. Siehe diesbezüglich § 15, Anmerkung.

gleichen Radien, deren Umhüllende uns die Wellenfront der durch die Anfangbedingungen erzeugten Welle darstellt.

Im Moment t_2, wo diese Front DC den Punkt P_0 berührt, fängt dort die Wirkung an. Es ist nun klar, dass $t_1 = t_2$ sein wird und dass beide Betrachtungen äquivalent sind.

Wir können nun aber auch folgendermassen verfahren. Zu dem Zweck ziehen wir von P_0 aus die Extremalen (welche in unserem Fall Gerade sein werden) und legen um P_0 als Mittelpunkt Kugeln (welche also zu den Extremalen senkrecht sein werden, siehe Anmerkung) mit verschiedenen Radien und markieren auf denselben die Zeiten t_1, t_2, t_3 u. s. w. (Fig. 2), welche die in der Fig. 1 bewegliche Kugel braucht um mit je einer der festen Kugeln der Fig. 2 zusammenzufallen.

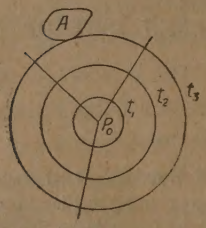


Fig. 2

Wir haben somit ein festes von der Zeit unabhängiges Netz erhalten. Zeichnen wir nun in dieses Netz das Gebiet A der Anfangsbedingungen, so können wir sofort das Moment ablesen in welchem die Wirkung im Punkte P_0 ansetzt (in der Fig. 2 im Moment t_3).

Obige Betrachtungen, oder ähnliche (siehe Anmerkung) gelten ganz allgemein für eine beliebige Wellengleichung mit Konstanten Koeffizienten, für $t \leqq t_1$.

Was aber für $t > t_1$ im Punkte P_0 geschieht, können wir ohne einer speziellen Untersuchung nicht bestimmen.

Speziell für die Gleichung

$$\frac{1}{c_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{1}$$

lehrt uns das Poissonsche Integral,

$$u_0(t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{t \int_F A d\omega\right\} + \frac{t}{4\pi}\int_F G d\omega \tag{2}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} u &= A(x, y, z) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= G(x, y, z) \end{aligned}\right\} t = 0 \tag{3}$$

die Anfangsbedingungen bedeuten, dass mit Hilfe der Integration längs der beweglichen Kugel, während dieselbe das Anfangsgebiet A der Fig. 1 durchfegt, der weitere Zustand im Punkte P_0 vollkommen bestimmt sein wird.

Sind nun die Koeffizienten der Wellengleichung nicht konstant, so können wir bei gewissen, später zu erörterden Bedingungen, vom Punkte P_0 aus nach allen Richtungen (Fig. 3) die Extremalen P_0A_1, P_0A_2, P_0A_3, u. s. w. ziehen, und dann die ensprechenden (geodätischen) Kugeln E_1, E_2, E_3... welche aber zu den Extremalen im allgemeinen nicht normal, sondern bekanntlich transversal sein werden.

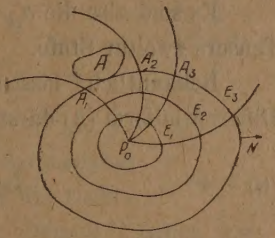


Fig. 3

Wir zeichnen uns wieder ein von der Zeit unabhängiges Netz (die Koeffizienten der Wellengleichung denken wir uns unabhängig von der Zeit) und falls wir uns in der Fig. 3 das Gebiet A der Anfangsbedingungen gegeben denken, so können wir genau wie früher, das Moment t_1 ablesen, im welchen die Wirkung von A im Punkte P_0 anzetzt.

Auf Grund obiger Überleguungen habe ich mir die Frage aufgeworfen wie sich im letzteren Fall (und zwar speziell für inhomogene isotrope Körper) bei gegebenen Anfangsbedingungen (3), der weitere Verlauf des Zustandes für $t > t_1$ im Punkte P_0 bestimmt und ob es eventuell möglich ist ein dem Poissonschem Integral (2) ähnliches aufzustellen.

Diese Frage soll nun im Folgenden behandelt werden, zu welchem Zweck wir gewisse mathematische Voraussetzungen machen müssen, welche in den folgenden §§ angegeben werden sollen. Wenn ich hierbei auch manches Bekannte kurz anführe, so geschieht dies erstens, um ein abgerundetes Bild zu erhalten und dann auch um die notwendigen Formeln zusammen zu haben.

§ 1. **Allgemeine Betrachtungen, Extremalen. Geodätische Kugel.** Wir bezeichnen durch $D(u)$ folgenden Ausdruck

$$D(u) \equiv \sum_{i,k} a^{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} + \sum_i b^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + gu; \qquad (i,k = 1, 2 \ldots n) \tag{1}$$

wobei die a^{ik}, b^i und g Funktionen der x^i sind und ausserdem ist:

$$a^{ik} = a^{ki}. \tag{2}$$

Ferner führen wir die Differentialform:

$$dS^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, dx^i\, dx^k; \qquad i,k = 1, 2 \ldots n \tag{3}$$

ein, wobei die a_{ik} kontragredient zu den a^{ik} sein sollen und deshalb gilt ebenfalls:

$$a_{ik} = a_{ki} \tag{4}$$

und ausserdem:

$$\sum_i a_{ik} a^{kv} = \begin{cases} 0; & i \neq v \\ 1; & i = v. \end{cases} \tag{5}$$

Es sind also die a_{ik} die Komponenten eines symmetrischen kovarianten Tensors zweiter Stufe.

Bekanntlich* lässt sich $D(u)$ in einer invarianten Form bezüglich der Differentialform (3) darstellen und zwar wird sein:

$$D(u) \equiv \Delta u + \sum_i c^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + gu. \tag{6}$$

Hierbei bedeuten:

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{m} \sum_i a^{ik} \frac{\partial u}{\partial x^i} \right); \qquad i, k = 1, 2 \ldots n \tag{7}$$

d. h. der Lamésche oder der zweite Beltramische Differentialparameter und

$$c^i = b^i - B^i \tag{8}$$

mit:

$$B^i = \sum_k \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\partial \sqrt{m}\, a^{ik}}{\partial x^k}. \tag{9}$$

Ferner ist

$$m = |a_{ik}| \tag{10}$$

die Determinante der Differentialform (3).

Wir wollen nun für das Folgende festlegen:

1) Wir nehmen an, dass wir uns im n-dimensionalen Euklidischen Raum befinden und betrachten die x^i als die entsprechenden Koordinaten und zwar einfachheitshalber als rechtwinklige. Der Übergang zu anderen Koordinaten in diesem Euklidischen Raum ist für spezielle Fälle leicht auszuführen, was wir auch später machen werden.

* E. Cotton. Sur les invariants differentiels de quelques équations linéaires aux derivées partielles du second ordre. Ann. de l'École Normale Sup. 3^{me} ser., t. XVII, 1900, p. 221—224; siehe auch: Th. Donder. Sur les équations linéaires aux derivées partielles d'un ordre quelconque. Journ. de Math. pure et appl. 9^{me} ser., t. VII, 1928, p. 173—187. Hier sind die Ergebnisse von Cotton auf Gleichungen beliebiger Ordnung ausgedehnt.

2) Die Differentialform (3), welche im allgemeinen ein Linienelement im Riemannschen Raum darstellt, soll immer definit positiv sein, weshalb also auch m immer positiv ist.

Von einem Punkt $P_0(x_0^1, x_0^2, \ldots x_0^n)$ führen wir in dem Euklidischen Raum eine Kurve bis zu dem Punkt $P(x^1, x^2, \ldots x^n)$, deren Länge wir durch s bezeichnen, vom Punkte P_0 aus gerechnet. Das Linienelement dieser Kurve ist ds (Fig. 4).

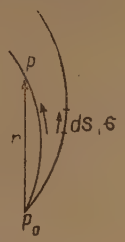


Fig. 4

Wir bezeichnen ferner

$$\frac{dx^i}{ds} = \xi^i \tag{11}$$

und es sind die ξ^i nichts anderes als die Richtungkosinusse der Tangente an die obige Kurve in Bezug auf die rechtwinkligen Koordinaten des Euklidischen Raumes. Demnach haben wir:

$$\sum_i (\xi^i)^2 = 1. \tag{12}$$

Im Riemannschen Raum entsprechen den Punkten P_0 und P ebenfalls zwei Punkte die wir auch durch P_0 und P bezeichnen. Die entsprechende Länge der Kurve von P_0 aus gerechnet bezeichnen wir durch S und ihr Linienelement durch dS.

Infolge von (11) erhalten wir dann aus (3):

$$S = \int_0^s \sqrt{\sum_{ik} a_{ik} \xi^i \xi^k}\, ds \tag{13}$$

wobei die Integration längs der Kurve der Fig. 4 im Euklidischen Raum zu führen ist.

Da nun die a^{ik} Funktionen der x^i sind und deshalb auch die a_{ik}, so können wir setzen:

$$\sum_{ik} a_{ik} \xi^i \xi^k = H(x^1, x^2, \ldots x^n;\ \xi^1, \xi^2 \ldots \xi^n). \tag{14}$$

Schreiben wir ferner, falls S eine Extremale bedeutet E statt S, so folgt an Stelle von (13):

$$E = \int_0^s \sqrt{H}\, ds \tag{15}$$

wobei, laut bekannten Regeln, es hierbei sein muss:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\sqrt{H}}{\partial\xi^i}\right)-\frac{\partial\sqrt{H}}{\partial x^i}=0; \qquad i=1,2\ldots n \tag{16}$$

Betrachten wir die ξ^i in (11) als die Komponenten eines kontravarienten Vektors, so ergibt sich für die entsprechenden kovarianten Komponenten ξ_i:

$$\xi_i=\sum_k a_{ik}\xi^k \tag{17}$$

Deshalb haben wir

$$\frac{\partial\sqrt{H}}{\partial\xi^i}=\frac{1}{\sqrt{H}}\sum_k a_{ik}\xi^k=\frac{\xi_i}{\sqrt{H}} \tag{18}$$

und

$$\sum_i \xi_i\xi^i=\sum_{i,k} a_{ik}\xi^i\xi^k=H. \tag{19}$$

Ferner wird augenscheinlich sein

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}\xi^i=\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{ds}=\frac{df}{ds}. \tag{20}$$

Multiplizieren wir nun (16) mit ξ^i und summieren, so erhalten wir deshalb

$$\sum_i \xi^i\frac{d}{ds}\left(\frac{\xi_i}{\sqrt{H}}\right)-\sum_i \frac{\partial\sqrt{H}}{\partial x^i}\xi^i=-\frac{1}{\sqrt{H}}\sum_i \xi_i\frac{d\xi^i}{ds}. \tag{21}$$

Ist im speziellen Fall, welcher für uns später in Betracht kommen wird

$$\xi_i=q^2\xi^i \tag{22}$$

wobei q eine Funktion der x^i ist, so folgt wegen (12).

$$\sum_i \xi^i\frac{d\xi^i}{ds}=\frac{q^2}{2}\sum_i \frac{d(\xi^i)^2}{ds}=0 \tag{23}$$

und deshald statt (21)

$$\sum_i \xi_i\frac{d}{ds}\left(\frac{\xi_i}{\sqrt{H}}\right)-\sum_i \xi^i\frac{\partial\sqrt{H}}{\partial x^i}=0. \tag{24}$$

D. h. im Falle (22) sind die n Gleichungen (16) von einander nicht unabhängig.

Nun ist die geodätische Länge E verschieden von der Länge s der Extremale der Fig. 4. Wir ordnen nun die Länge E der Kurve s zu und verstehen dann unter E die geodätische Länge der Kurve s der Fig. 4 im Euklidischen Raum.

Wegen der Voraussetzung II können wir im allgemeinen von Punkte P_0 der Fig. 4 nach allen Richtungen Extremalen ziehen.

Tun wir dies und legen ausserdem fest, dass die geodätischen Längen aller dieser Extremalen gleich und gleich E sind, so erhalten wir im Riemannschen Raum eine Kugel und im Euklidischen Raum entsprechend eine geodätische Kugel (geod. Kug.), falls wir die Endpunkte aller Extremalen durch eine Fläche verbinden (siehe Fig. 3 der Einleitung).

Sind x^i die Koordinaten dieser Fläche, so gilt für dieselbe augenscheinlich die Gleichung

$$E = E(x^1, x^2, \ldots x^n;\ x_0^1, x_0^2 \ldots x_0^n) = \text{konst.} \tag{25}$$

Bei der Verschiebung des Endpunktes der Extremale haben wir bekanntlich* und unter Beachtung von (18)

$$\frac{\partial E}{\partial x^i} = \frac{\partial \sqrt{H}}{\partial \xi^i} = \frac{\xi_i}{\sqrt{H}}. \tag{26}$$

Nun folgt aus (17) auf Grund von (5)

$$\xi^i = \sum_k a^{ik} \xi_k. \tag{27}$$

Setzen wir dies in (14) ein so fliesst wegen (5)

$$H = \sum_{ikl m} a_{ik} a^{i\lambda} \xi_\lambda a^{km} \xi_m = A \tag{28}$$

mit der Bezeichnung

$$A = \sum_{ik} a^{ik} \xi_i \xi_k. \tag{29}$$

* J. Hadamard. Lecons sur le calcul des Variations. Paris, Hermann, 1910, t. I, p. 159, oder auch. A. Kneser. Lehrbuch der Variationsrechnung. Braunschweig, Vieweg, u. Sohn. 2 Aufl., 1925, p. 138 ff.

Hieraus und (26) ergibt sich dann die bekannte Beziehung

$$\sum_{ik} a^{ik} \frac{\partial E}{\partial x^i} \frac{\partial E}{\partial x^k} = 1, \tag{30}$$

wobei links der erste Beltramische Differentialparameter steht.

Dieser Gleichung müssen also die Extremalen genügen und speziell auch die Oberfläche unserer geod. Kug.

Im Riemannschen Raum sind die Endstücke der Extremalen bekanntlich senkrecht zu der obigen Kugel, was man auch leicht nachweisen kann, worauf wir aber nich eingehen wollen.

In dem Euklidischen Raum sind diese Endstücke nicht senkrecht zu der Oberfläche der geod. Kug., sondern transversal, resp. konormal.

Bezeichnen wir demnach durch $\cos(N, x^i)$ den Richtungskosinuss der zur geod. Kug. äusseren Normale N in Bezug auf die x^i-Achse im Euklidischen Raum (Fig. 3), so haben wir und wegen (26)

$$\cos(N, x^i) = \frac{\frac{\partial E}{\partial x^i}}{\sqrt{\sum_k \left(\frac{\partial E}{\partial x^i}\right)^2}} = \frac{\xi_i}{\sqrt{\sum_k (\xi_k)^2}}. \tag{31}$$

Wegen der Tranversalität wird also sein

$$\cos(N, x^i) = \xi^i. \tag{32}$$

§ 2. **Wellengleichung. Charakteristische Gleichung. Brechungsexponent.** Aus (1) § 1 bilden wir jetzt die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{c^2 \partial t^2} = \sum_{i,k} a^{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} + \sum b^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + gu \tag{1}$$

wobei t die Zeit bedeutet und c eine Konstante ist, z. B. die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Es sei nun eine Hyperfläche

$$f(x^1, x^2, \ldots x^n, t) = 0 \tag{2}$$

gegeben, welche wegen des Vorkommens der Zeit sich im allgemeinen bewegen wird.

Die Fläche f sei von solcher Beschaffenheit, dass auf ihr und ausserhalb (oder innerhalb) derselben u überall gleich Null ist.

Ausserdem sollen auf ihr alle ersten Deriviierte von u ständig verschwinden.

Dann genügt f der bekannten charakteristischen Gleichung von (1),

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 - \sum_{i,k} a^{ik}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^k} = 0 \tag{3}$$

und stellt die Front der Welle dar.

Wir kehren nun zu unserer geod. Kug. zurück, welche durch (25) § 1 gegeben ist und setzen

$$f \equiv ct \pm E = 0. \tag{4}$$

Auf Grund von (30) § 1 ist nun leicht zu ersehen, dass (4) der Gleichung (3) genügen wird. Also stellt (4) eine der möglichen Fronten einer Welle dar.

Nehmen wir z. B. das Minuszeichen in (4), so vergrössert sich die geod. Kug. mit der Zeit und beim Pluszeichen, verkleinert sie sich.

Denken wir uns nun alle Extremalen, die vom Punkte P_0 ausgehen gezeichnet und ebenfalls die entsprechenden geod. Kug. für verschiedene Werte E_1 E_2 u. s. w. von E, so erhalten wir in unserem Euklidischen Raum ein von der Zeit unabhängiges Netz (siehe Fig. 3 der Einleitung).

Wir wollen noch in Kürze die Geschwindigkeit der Oberfläche der geod. Kug. und die entsprechenden Brechungsexponenten behandeln.

Im Moment t befinde sich die Oberfläche der geod. Kug. in OP, Fig. 5 und im Moment $t + dt$ in BAP_1. Die Normalengeschwindigkeit v ist

$$v = \frac{dN}{dt}. \tag{5}$$

Nun ist wegen (4)

$$cdt = dE = \sum_i \frac{\partial E}{\partial x^i}dx^i = dN \sum_i \frac{\partial E}{\partial x}\cos(N, x^i) \tag{6}$$

da ja die dx^i die Projektionen von dN auf die Koordinatenachsen sind.

(Wir haben in (4) das Minuszeichen genommen, also vergrössert sich die geod. Kug.).

Aus (6) folgt dann unter Beachtung von (31) § 1

$$v = \frac{c}{\sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial E}{\partial x^i}\right)^2}} \tag{7}$$

oder wegen (26) § 1

$$v = \frac{c\sqrt{H}}{\sqrt{\sum_k (\xi_k)^2}} \tag{8}$$

weshalb also

$$n_N = \frac{\sqrt{\sum_k (\xi_k)^2}}{\sqrt{H}} \tag{9}$$

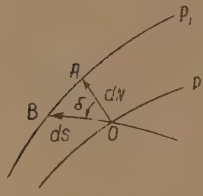


Fig. 5

den Brechungsexponenten längs der Normale bedeutet.

Wie aus der Fig. 5 ersichtlich entsprich dem Wert dN eine Vergrösserung der Extremale um ds. Dabei hat sich die geod. Länge laut (15) § 1 um $dE = \sqrt{H}\,ds$ vergrössert und es ist laut der Fig. 5 $dN = ds\cos\delta$. Bezeichnen wir deshalb durch V die Geschwindigkeit längs der Extremale (Strahlengeschwindigkeit) so wird sein

$$V\cos\delta = v. \tag{10}$$

Aus (31) und (19) § 1 haben wir nun augenscheinlich

$$\cos\delta = \frac{\sum_i \xi^i \xi_i}{\sqrt{\sum_k (\xi_k)^2}} = \frac{H}{\sqrt{\sum_k (\xi_k)^2}} \tag{11}$$

demnach wegen (10) und (8)

$$V = \frac{v}{\cos\delta} = \frac{c}{\sqrt{H}} \tag{12}$$

und es wird also

$$n_s = \sqrt{H} = \frac{dE}{ds} \tag{13}$$

der Brechungsexponent längs der Extremale (längs dem Strahl) sein.

Wir bemerken noch zum Schluss, dass wir, ohne die Erörterungen dieses § zu stören, links in (I) noch ein Glied mit $\frac{\partial u}{\partial t}$ einführen können. Wir kommen später darauf zurück (§ 7).

§ 3. **Einschränkende Bedingungen. Inhomogene isotrope Medien.** Die Verschiedenheit der Normalengeschwindigkeit v und der Strahlengeschwindigkeit V in § 2 zeigt uns dass wir es im allgemeinen mit einem anisotropen, resp. kristallinischem und inhomogenen Medium zu tun haben.

Wir wollen uns im weiteren insofern einschränken, dass wir nur isotrope aber inhomogene Medien betrachten.

Dann ist $V = v$ und deshald in § 2 $\cos \delta = 1$ und folglich laut (11) § 2,

$$H = \sqrt{\sum_k (\xi_k)^2}. \tag{1}$$

Nun ergibt sich bei $V = v$, dass dann

$$\cos (N, x^i) = \xi^i \tag{2}$$

sein wird, d. h. wegen (3) § 1 und (1),

$$\xi_i = H\xi^i. \tag{3}$$

Setzen wir nun

$$H = q^2 \tag{4}$$

und deshalb statt (3),

$$\xi_i = q^2 \xi^i \tag{5}$$

d. h. gehen zu dem Fall (22) § 1 über, so ersehen wir, dass hierdurch wegen (12) § 1 auch (1) befriedigt wird.

Es ist also der Brechungsexponent q eine Funktion der x^i und wir wollen sofort annehemen, dass,

$$q \geqq 0 \tag{6}$$

sein soll, wobei dass Gleichheitszeichen nur eventuell an singulären Stellen gültig ist.

Aus (17) § 1 und (5) folgt,

$$a_{ik} = \begin{cases} 0; & i \neq k \\ q^2; & i = k \end{cases} \tag{7}$$

und demnach statt (3) § 1,

$$dS^2 = q^2 \sum_i (dx^i)^2; \quad m = q^{2n} \tag{8}$$

und

$$a^{ik} = \begin{cases} 0; & i \neq k \\ \frac{1}{q^2}; & i = k, \end{cases} \tag{9}$$

Statt (7)—(9) § 1 ergibt sich dann

$$\Delta u = \frac{1}{q^n} \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k} \left(q^{n-2} \frac{\partial u}{\partial x^k} \right) \tag{10}$$

und

$$c^i = b^i - B^i = b^i - \frac{(n-2)}{q^2} \frac{\partial q}{\partial x^i} \tag{11}$$

Wegen (5) und (6) folgt weiter aus (18) § 1

$$\frac{\partial \sqrt{II}}{\partial \xi^i} = q\xi^i \tag{12}$$

und wir erhalten demnach an Stelle der Gleichungen (16) § 1 die folgenden

$$\frac{dq\xi^i}{ds} = \frac{\partial q}{\partial x^i}; \qquad i = 1, 2 \ldots n \tag{13}$$

welche also wegen (24) § 1 nicht unabhängig voneinander sein werden.

Ferner fliesst aus (26) und (30) § 1

$$\frac{\partial E}{\partial x^i} = q\xi^i \tag{14}$$

und

$$\sum_i \left(\frac{\partial E}{\partial x^i} \right)^2 = q^2. \tag{15}$$

Endlich geht das Integral (15) § 1 über in

$$E = \int_0^s q ds \tag{16}$$

und statt (20) § 1 wegen (15) folgt

$$\sum_i \frac{\partial E}{\partial x^i} \xi^i = \frac{dE}{ds} = q \tag{17}$$

was sich auch unmittelbar aus (16) ergibt.

§ 4. **Drei Dimensionen. Geodätische Koordinaten. Einführung der Funktion w.** Wir gehen nun zum dreidimensionalen Raum über, schreiben für den Brechungsexponenten, wie üblich, n statt q und erhalten dann

$$E = \int_0^s n\,ds;\quad n > 0;\quad dS^2 = n^2(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{1}$$

Ferner setzen wir,

$$\xi^1 = \frac{dx}{ds} = \dot{x};\quad \xi^2 = \frac{dy}{ds} = \dot{y};\quad \xi^3 = \frac{dz}{ds} = \dot{z}. \tag{2}$$

Bedeutet $\mathfrak{s}$ den Einheitsvektor in Richtung der Extremalen Fig. 6, vom Punkte P_0 aus gerechnet so ist

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{i}\dot{x} + \mathfrak{j}\dot{y} + \mathfrak{k}\dot{z} \tag{3}$$

wo wir wie üblich unter $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen X, Y, Z verstehen.

Der zweite Beltramische Differentialparameter Δu wird

$$\Delta u = \frac{1}{n^2}\left\{\frac{\partial n\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial n\frac{\partial u}{\partial y}}{\partial y} + \frac{\partial n\frac{\partial u}{\partial z}}{\partial z}\right\} = \frac{div n\nabla u}{n^2} \tag{4}$$

und

$$c^i = b^i - B^i = b^i - \frac{1}{n^2}\frac{\partial n}{\partial x^i}. \tag{5}$$

Die Differentialgleichungen der Extremallen lauten jetzt

$$\frac{dn\dot{x}}{ds} = \frac{\partial n}{\partial x};\quad \frac{dn\dot{y}}{ds} = \frac{\partial n}{\partial y};\quad \frac{dn\dot{z}}{ds} = \frac{\partial n}{\partial z}. \tag{6}$$

Ferner haben wir

$$\frac{\partial E}{\partial x} = n\dot{x};\quad \frac{\partial E}{\partial y} = n\dot{y};\quad \frac{\partial E}{\partial z} = n\dot{z} \tag{7}$$

und

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)^2 = n^2. \tag{8}$$

Ausserdem können wir wegen (4) schreiben

$$\nabla E = n\mathfrak{s};\quad (\nabla E)^2 = n^2. \tag{9}$$

Endlich wird sein

$$dE = n ds. \tag{10}$$

Wir transformieren jetzt die Differentialform (3) § 1 auf geodätische Koordinaten, von denen die eine E selbst ist, und erhalten dann bekanntlich

$$dS^2 = dE^2 + \sum_{i,k} b_{ik}\, d\lambda^i\, d\lambda^k; \qquad i,k = 2,3 \ldots n. \tag{11}$$

Bezeichnen wir die Determinante hiervon durch $\overline{m}$ so ist

$$\sqrt{\overline{m}} = \sqrt{m}\,\gamma \tag{12}$$

wobei

$$\gamma = \frac{\partial(x^1, x^2 \ldots x^n)}{\partial(E, \lambda^2, \lambda^3 \ldots \lambda^n)} = \frac{1}{n}\frac{\partial(x^1, x^2 \ldots x^n)}{\partial(s, \lambda^2, \lambda^3 \ldots \lambda^n)} = \frac{\gamma_1}{n} \tag{13}$$

bedeutet.

In diesen Koordinaten lautet der zweite Beltramische Differentialparameter

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{\overline{m}}}\frac{\partial \sqrt{\overline{m}}\,\frac{\partial u}{\partial E}}{\partial E} + \frac{1}{\sqrt{\overline{m}}}\sum_k \frac{\partial}{\partial \lambda^k}\left\{\sqrt{\overline{m}}\sum_i b^{ik}\frac{\partial u}{\partial \lambda^i}\right\} \qquad i,k = 2,3 \ldots n \tag{14}$$

wo die b^{ik} kontragredient zu den b_{ik} in (11) sind.

Speziell für unseren dreidimensionalen Raum erhalten wir statt (14

$$\Delta u = \frac{div n \nabla u}{n^3} = \frac{1}{n^2\gamma_1}\frac{\partial n^2 \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial E}}{\partial E} +$$

$$+ \frac{1}{n^2\gamma_1}\sum_k \frac{\partial}{\partial \lambda^k}\left\{n^2\gamma_1 \sum_i b^{ik}\frac{\partial u}{\partial \lambda^i}\right\} \qquad i,k = 2,3 \tag{15}$$

mit

$$\gamma_1 = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s, \lambda^2, \lambda^3)}. \tag{16}$$

Ist nun $u = M$, wo M nur von E abhängt so erhalten wir dann aus (15)

$$\Delta M = \frac{div n \nabla M}{n^3} = \frac{1}{n^2\gamma_1}\frac{\partial n^2 \gamma_1 \frac{dM}{dE}}{\partial E}. \tag{17}$$

Wie denken uns nun von dem Punkt P_0 ein unendlich dünnes Büschel Extremalen ausgehend. Dieses Büschel schneidet aus der geod. Kug. E das

Flächenelement df aus (Fig. 6), und aus der benachbarten Kugel $E + dE$ das Element df_1. Wir berechnen jetzt mit Hilfe des Volumenelementes dv (Fig. 6) den Operator Δu auf Grund von (3) und erhalten in bekannter Weise * unter Beachtung von (10)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 n^2 \frac{\partial u}{\partial E} df}{n^2 \partial E df} + D, \tag{18}$$

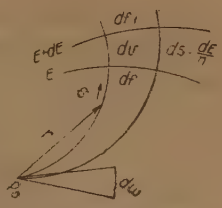


Fig. 6

wobei man sich im ersten Glied den Grenzübergang zu $dv = 0$ ausgeführt denken muss. Das zweite Glied D bezieht sich auf die Oberflächenintegrale längs der Mantelfläche von dv und verschwindet, falls ∇u parallel zu ds ist, wie z. B. in (17).

Das dem Volumenelement dv entsprechenden Volumenelement dV im Riemannschen Raum ist,

$$dV = dEdF = \sqrt{m}\, dv = n^3\, dv = n^3\, dsdf = n^2\, dEdf. \tag{19}$$

Demnach ergibt sich für das Oberflächenelement dF der Kugel im Riemannschen Raum

$$dF = n^2\, df. \tag{20}$$

Wir denken uns jetzt an die Extremalen unseres Büschels in P_0 Tangenten gelegt. Dieses Tangentenbüschel schneidet dann aus der Einheitskugel mit dem Mittelpunkt in P_0 das Flächenelement $d\omega$ aus, Fig. 6. Es ist hierbei klar, dass dF resp. df zugleich mit $d\omega$ verschwindet. Wir können deshalb setzen

$$n^2\, df = K d\omega. \tag{21}$$

Teilen wir beiderseits mit $d\omega$ und gehen dann zur Grenze $d\omega = 0$ über so ist klar, da df und $d\omega$ positive Grössen sind, dass wir schreiben können,

$$\frac{n^2\, df}{d\omega} = w^2 \tag{22}$$

wodurch die eingeführte Funktion w vollkommen definiert sein wird.

Da nun augenscheinlich $d\omega$ unabhängig von E sein wird, so erhalten wir wegen (22) statt (18)

$$\Delta u = \frac{\partial w^2 \frac{\partial u}{\partial E}}{w^2 \partial E} + D \tag{23}$$

wo demnach der Grenzübergang zu $dv = 0$ ausgeführt ist.

* Siehe W. v. Ignatowsky. Die Vektoranalysis. Lpz., Teubner, Bd. I, 1926, 3. Aufl., p. 16.

Auf Grund des Vorhergehenden ergibt uns ein Vergleich von (23) und (15)

$$w^2 = n^2 C(\lambda^2, \lambda^3)\cdot\gamma_1 = n^2 C(\lambda^2, \lambda^3)\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s, \lambda^2, \lambda^3)}. \tag{24}$$

Wir werden sehen, dass für die Berechnung von w, (22) viel bequemer ist als (24), hauptsächlich falls uns die Koordinaten λ^2 und λ^3 unbekannt sind, von welchen ja die Funktion w im allgemeinen abhängen wird, ebenso wie $C(\lambda^2, \lambda^3)$ in (24).

§ 5. **Bemerkungen zu der Funktion w. Spezielle Annahme.** Wir setzen nun voraus, dass n um den Punkt P_0 herum regulär ist und wie schon früher angenommen, nicht verschwindet.

Dann folgt aus der Fig. 6, da wir es mit einem isotropen Medium zu tun haben,

$$E = nr;\ E \to 0. \tag{1}$$

(Bei einem anisotropen Medium muss hier noch eine Winkelfunktion auftreten. Siehe Anmerkung § 15).

Ganz analog ersehen wir, dass bei $E \to 0$, df in (22) § 4 gleich $r^2 d\omega$ sein wird und deshalb

$$w = nr = E;\ E \to 0. \tag{2}$$

Für $n = 1$ geht die geod. Kug. augenscheinlich in eine gewöhnliche Kugel über es wird $w = r$, d. h. konstant längs der Oberfläche dieser Kugel. Im allgemeinen Fall ändert sich w längs der Oberfläche der geod. Kug. da es von den Winkelkoordinaten λ^2 und λ^3 abhängen wird.

Aus (1) und (2) ersehen wir aber, dass w niemals die Form eines Produktes $\mu(E)\nu(\lambda^2, \lambda^3)$ haben kann, denn sonst würde in (2) noch eine Winkelfunktion auftreten. Allgemein haben wir also

$$w = w(E, \lambda^2, \lambda^3) \tag{3}$$

mit der Bedingung (2). Wir werden später hierfür Beispiele geben (§ 8).

Wir nehmen nun an n sei zentralsymmetrisch. d. h.

$$n = n(R) \tag{4}$$

wo R die Entfernung vom Koordinatenanfang bedeutet.

Fällt P_0 mit dem Koordinatenanfang zusammen, so sind die Extremalen Gerade (Radien vom Koordinatenanfang) und wir haben dann in (22) § 4

$$df = R^2 d\omega$$

weshalb sich ergibt,

$$nR = w \tag{5}$$

für beliebige E und es wird sein,

$$E = \int_0^R n(R)\,dR. \tag{6}$$

Aus (6) können wir im allgemeinen R als Funktion von E ausdrücken, demnach auch n und folglich auch w.

Umgekehrt können wir bei gegebenem w als Funktion von E, letztere Grösse als Funktion von nR laut (5) bestimmen und dann, mit Hilfe von (6) durch Differentiation und nachheriger Integration, die Form der Funktion $n(R)$.

Auf Grund dieser Überlegungen stellen wir nun folgende kleine Tabelle zusammen,

$$w = \frac{\sin mE}{m}; \quad n = \frac{b^2 n_1}{b^2 + R^2} \tag{7}$$

$$w = E = R; \; n = 1 \tag{8}$$

$$w = \frac{\sinh mE}{m}; \quad n = \frac{b^2 n_1}{b^2 - R^2} \tag{9}$$

mit

$$m = \frac{2}{bn_1}. \tag{10}$$

Den Grund der Wahl der Werte (7) und (9) und die allgemeine Beziehung zwischen den drei Grössen wird später erörtert werden (§ 16). Vorläufig bemerken wir nur, dass n_1 den Wert des Brechungsexponenten im Koordinatenanfang bedeutet ($R = 0$) und dass für $b = \infty$ und $n_1 = 1$ alle drei Werte zusammenfallen werden.

Nehmen wir nun an, dass w eine Funktion nur von E ist bei beliebiger Lage von P_0, so ist klar, dass obige Rechnung uns den allgemeinen Wert von w liefern wird. Das Umgekehrte gilt selbstverständlich nicht.

Wir werden deshalb später nachweisen, dass die Werte (7) und (9) für w tatsächlich für beliebige Lagen des Punktes P_0 gültig sind.

Da wir nun sehen, dass Werte von w welche Funktionen nur von E sind existieren so wollen wir für das Folgende (mit wenigen Ausnahmen)

$$w = w(E) \tag{11}$$

annehmen und unter dieser Voraussetzung unsere Untersuchungen fortsetzen.

Anmerkung. In einer unlängst erscheinenen Arbeit von S. Sobolev: L'équation d'onde pour un milieu hétérogène. Public. l'Inst. Seismol. Acad. Sci. de l'URSS, 1930, betrachtet Sobolev nicht die Gleichung (1) § 6, sondern die gewöhnliche

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{d\vec{v}\nabla u}{n^2}. \tag{a}$$

und führt, zwecks Integration derselben eine Funktion σ ein. Dieselbe hängt mit unserem w folgendermassen zusammen,

$$w\sigma = \sqrt{n_0}\,\sqrt{n} \tag{b}$$

wobei n_0 den Brechungsexponenten im Punkte P_0 (Fig. 6) bedeutet.

§ 6. **Vorbereitende Bemerkungen.** Wir setzen in (6) § 1 $c^i = g = 0$ und erhalten dann auf Grund von (1) § 2 und (4) § 4 folgende Gleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{div n\nabla u}{n^3} \tag{1}$$

die wir nun jetzt unter der Annahme (11) § 5 untersuchen wollen.

Zu dem Zweck multiplizieren wir (1) mit $n^3\,dv$, integrieren über das Volumen V der geod. Kug. um den Punkt P_0 herum und erhalten dann

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_V un^3\,dv = \int\limits_F \frac{n^2\,\partial u}{\partial E}\,df = \int\limits_F w^2\frac{\partial u}{\partial E}\,d\omega = w^2\frac{\partial}{\partial E}\int\limits_F u\,d\omega \tag{2}$$

wobei F die Oberfläche der geod. Kug. bedeutet.

Für die linke Seite von (2) ergibt sich

$$\int\limits_V n^3 u\,dv = \int\limits_0^s \int\limits_{F_1} n^3 u\,ds\,df = \int\limits_0^E dE w^2 \int\limits_{F_1} u\,d\omega \tag{3}$$

wobei F_1 die Oberfläche irgend einer geod. Kug. innearhlb der Kug. in (2) ist.

Führen wir nun die Funktion

$$\bar{u} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_F u\,d\omega \tag{4}$$

ein und bedeutet $u_0(t)$ den Wert von u in P_0, d. h. für $E = 0$ so folgt,

$$\bar{u} = u_0(t);\ E = 0. \tag{5}$$

Setzen wir jetzt (3) und (4) in (2) ein, so ergibt sich nach Differentiation nach E,

$$\frac{\partial^2 w\bar{u}}{c^2\,\partial t^2} = \frac{\partial\, w^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial E}}{\partial E} \tag{6}$$

oder falls wir setzen

$$\varphi = w\bar{u} \tag{7}$$

statt (6)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{c^2\,\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial E^2} - \varphi \cdot h \tag{8}$$

mit

$$h = \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial E^2}. \tag{9}$$

Gehen wir nun zu den charakteristieschen Koordinaten

$$\xi = E - ct;\ \eta = E + ct \tag{10}$$

über, so er fliesst aus (8)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial\zeta\partial\eta} = \frac{\varphi}{4}h. \tag{11}$$

Unter der Annahme der Regularität von w um P_0 herum ersehen wir aus (2) § 5 dass h für $E = 0$ immer endlich sein wird.

Es sei nun $f(\zeta, \eta)$ eine Lösung von (11), also,

$$\varphi(E, t) = w(E)\bar{u} = f(\zeta, \eta). \tag{12}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial f}{c\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial\zeta} + \frac{\partial f}{\partial\eta} = \frac{w}{c}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \tag{13}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial E} = \frac{\partial f}{\partial\zeta} + \frac{\partial f}{\partial\eta} = \frac{\partial w\bar{u}}{\partial E}. \tag{14}$$

Nehmen wir nun an, dass $\frac{\partial \bar{u}}{\partial E}$ für $E = 0$ endlich ist, so ergibt sich aus (13) und (14)

$$\left(\frac{-\partial f}{\partial\zeta} + \frac{\partial f}{\partial\eta}\right)_{E=0} = 0 \tag{15}$$

und

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\right)_{E=0} = u_0(t). \tag{16}$$

D. h. also

$$2\frac{\partial f}{\partial \eta_{E=0}} = u_0(t) = \left\{\frac{\partial f}{c\partial t} + \frac{\partial f}{\partial E}\right\}_{E=0}. \tag{17}$$

Wir führen jetzt in (13) und (14) den Wert $\bar{u}$ aus (4) ein. Es folgt dann

$$2\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial E}\left\{w(E)\int_F u_E\, d\omega\right\} + \frac{w(E)}{4\pi c}\int_F \frac{\partial u_E}{\partial t}\, d\omega \tag{18}$$

wobei der Index E bei u unter den Integralen bedeuten soll, dass die Werte für u auf der geod. Kug. E zu nehmen sind, genau so wie in (4).

Es seien nun folgende Anfangsbesingungen gegeben

$$\left.\begin{aligned} u &= A(x, y, z) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= G(x, y, z) \end{aligned}\right\} t = 0. \tag{19}$$

Dann ergibt uns (18),

$$2\frac{\partial f}{\partial \eta_{t=0}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial E}\left\{w(E)\int_F A_E\, d\omega\right\} + \frac{w(E)}{4\pi c}\int_F G_E\, d\omega. \tag{20}$$

Ferner erhalten wir aus (12), wegen (2) § 5

$$\varphi(0, t) = 0 = f(\zeta, \eta) = f - (ct, ct);\ E = 0 \tag{21}$$

oder allgemein

$$f(\zeta, \eta) = 0;\ -\zeta = \eta. \tag{22}$$

§ 7. **Ableitung einiger Poissonscher Integrale.** Wir betrachten jetzt die Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta \partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial \zeta \partial \eta} = 0. \tag{1}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \delta(\eta).$$

und deshalb wegen (10) § 6

$$\frac{\partial f}{\partial n_{E=0}} = \delta(ct); \quad \frac{\partial f}{\partial n_{t=0}} = \delta(E). \tag{3}$$

Diese beiden Gleichungen unterscheiden sich nur dadurch, dass E an Stelle von ct steht. Deshalb ergibt uns ein Vergleich von (17) und (20) § 6 sofort dass Poissonsche Integral,

$$u_0(t) = \frac{1}{4\pi c}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[w(ct)\int_F A_{E=ct}\,d\omega\right] + w(ct)\int_F G_{E=ct}\,d\omega\right\}. \tag{4}$$

Jetzt schreiben wir nun statt (1) § 6

$$2q\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k^2 u = \frac{div n \nabla u}{n^3} \tag{5}$$

wobei q und k konstante Grössen bedeuten. Diese Gleichung (5) erinnert sehr an die Telegraphengleichung wo k^2 von der sogenannten Ableitung abhängt und q die zeitliche Dämpfung bestimmt.

Aus (5) erhalten wir nun, analog (8) § 6,

$$2q\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + k^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial E} - \varphi \cdot h \tag{6}$$

und falls wir

$$\varphi = \varphi_1 e^{-qc^2 t} \tag{7}$$

setzen, statt (6)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + (k^2 - c^2 q^2)\varphi_1 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial E^2} - \varphi_1 h \tag{8}$$

oder wegen (10) § 6

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \zeta \partial \eta} - \frac{(k^2 - c^2 q^2)}{4}\varphi_1 = \frac{\varphi_1 h}{4}. \tag{9}$$

Nun kehren wir zu § 5 zurück und nehmen laut (7) § 5 an

$$n = \frac{b^2 n_1}{b^2 + R^2}; \quad w(E) = \frac{\sin mE}{m}; \quad m = \frac{2}{bn_1}. \tag{10}$$

Dann ist

$$h = -m^2 = -\frac{4}{b^2 n_1^2}. \tag{11}$$

Setzen wir nun $q = 0$ und $k^2 = m^2$ so folgt statt (5)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + m^2 u = \frac{div n \nabla u}{n^3} \tag{12}$$

und statt (9) da in diesem Fall, wegen (7) $\varphi = \varphi_1$ ist, ergibt sich die Gleichung (1).

Deshalb folgt aus (4) sofort das Poissonsche Integral

$$u_0(t) = \frac{1}{4\pi cm}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\sin(mct)\int_F A_{E=ct}\,d\omega\right] + \sin(mct)\int_F G_{E=ct}\,d\omega\right\} \tag{13}$$

welches also für die Gleichung (12) bei dem Brechungsexponent (10) gültig sein wird.

Jetzt nehmen wir laut (9) § 5 an

$$n = \frac{b^2 n_1}{b^2 - R^2}; \quad w(E) = \frac{\sinh mE}{m}; \quad m = \frac{2}{bn_1}. \tag{14}$$

Dann ist

$$h = m^2 = \frac{4}{b^2 n_1^2}. \tag{15}$$

Machen wir nun $k^2 = 0$ und $q = \frac{m}{c}$ so folgt aus (5)

$$\frac{2m}{c}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{div n \nabla u}{n^3} \tag{16}$$

und aus (8) ergibt sich wieder die Gleichung (1), wo an Stelle von φ, wegen (7) jetzt φ_1 zu setzen ist.

Dann ergibt sich folgendes Poissonschen Integral

$$u_0(t) = \frac{e^{-mct}}{4\pi cm}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\sinh(mct)\int_F A_{E=ct}\,d\omega\right] + \sinh(mct)\int_F G_{E=ct}\,d\omega\right\} \tag{17}$$

welches also für die Gleichung (16) bei dem Brechungsexponenten (14) gültig sein wird.

Die Diskussion der Integrale (13) und (17) verlegen wir auf später (§ 13).

§ 8. Zentralsymmetrischer Brechungsexponent. Berechnung von w. Grundkreis-Geschlossene Extremalen. Im folgenden werden wir es mit einem zentralsym-

metrischen Brechungsexponent zu tun haben wobei also $n = n(R)$ sein wird (Siehe § 5). Dieser Fall ist zur Genüge bekannt* und wir wollen deshalb nur die notwendigen Formeln hinschreiben und bei dieser Gelegenheit eine Ableitung derselben nur skizzieren, welche uns einheitlicher erscheint wie die üblichen.

Wegen der Zentralsymmetrie sind die Extremalen ebene Kurven die in der Meridionalebene gelegen sein werden.

In dieser Ebene können wir statt des Linienelementes (1) §4 schreiben (Fig. 7)

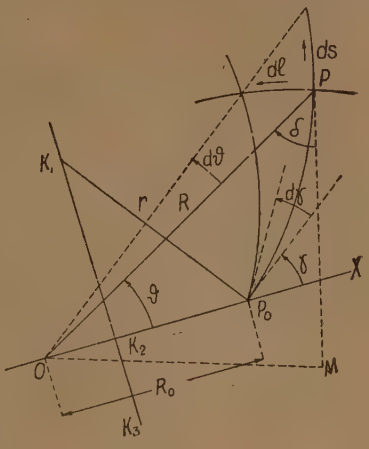


Fig. 7

$$(1) \qquad dS^2 = n^2(dR^2 + R^2 d\vartheta^2) =$$

$$= n^2 R^2 \left(\frac{dR^2}{R^2} + d\vartheta^2\right).$$

Setzen wir nun

$$(2) \qquad \frac{dR}{R} = dz; \quad z = \lg R + C; \quad R = Ce^z$$

so folgt statt (1),

$$(3) \qquad dS^2 = C^2 n^2 e^{2z}(dz^2 + d\vartheta^2),$$

wodurch das Linienelement auf die Form desjenigen einer Liouvillschen Fläche gebracht worden ist. Das weitere folgt dann von selbst.** Aus dem Satz von Clairaut folgt dann, Fig. 7

$$(4) \qquad R^2 n \frac{d\vartheta}{ds} = Rn \sin\delta = np = \text{konst} = D = R_0 n_0 \sin\gamma$$

wobei also $p = OM$, die Entfernung der Tangente an die Extremale im Punkte P, vom Koordinatenanfang, bedeutet, (n_0 — Brechungsexponent in P_0).

* Siehe den zusammenfassende Artikel von R. Straubel. Die Dioptrik in Medien mit kontinuirlich variablem Brechungsexponent in dem Handbuch der physikalisch. Optik Hrgb. v. E. Gehrke, Lpz., A. Barth, 1927, Bd. I, p. 218.

** Siehe z. B. V. u. K. Kommerell. Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. Lpz. W. Gruyter Bd. I, 1931, p. 184 u. ff. und auch G. Darboux. Leçons sur la Théorie générale des surfaces. Paris, Gauthier-Villars, vol. III, 1894, p. 1—22.

Weiter haben wir dann

$$E = \int_{R_0}^{R} \frac{n^2 R dR}{\sqrt{n^2 R^2 - D^2}} \tag{5}$$

und

$$\vartheta = D \int_{R_0}^{R} \frac{dR}{R\sqrt{n^2 R^2 - D^2}} \tag{6}$$

mit dem Wert der Konstante D aus (4).

Es sei nun $P_0 K_1$ normal zu der Extremale $P_0 P$ und K_1 der Krümmungsmittelpunkt. Wir wissen dass die Krümmungsmittelpunkte aller Extremalen im punkt P_0 auf der Geraden $K_1 K_2 K_3$, senkrecht zur OP_0 liegen werden.

Hierbei besteht die Beziehung *

$$\frac{dn}{dN} = \frac{n}{r} \tag{7}$$

wo r den Krümmungsradius und N die Normale zur Extremalen in P_0, zum Krümmungsmittelpunkt hin, gerechnet bedeutet.

Nun ist klar, dass für jeden Kreis mit O als Mittelpunkt, die Beziehung (4) bestehen wird. Derselbe ist aber im allgemeinen keine Extremale. Tritt nun dieser Fall aber ein, so bezeichnen wir ihn als Grundkreis und seinen Radius durch R_1.

Un nun R_1 zu bestimmen (falls er existiert), betrachten wir die Fig. 7. Es ist K_1 der Krümmungsmittelpunkt derjenigen Extremale, welche im Punkte P_0 senkrecht zu OP_0 ist. Es bestimmt sich dann einfach R_1 aus der Bedingung, dass K_1 mit O zusammenfallen muss. Kehren wir deshalb die Richtung von N in (7) um, so ersehen wir, dass wir aus der Gleichung

$$-\left(\frac{dn}{dR}\right)_{R=R_1} = \frac{n}{R_1} \tag{8}$$

den Radius R_1 des Grundkreises bestimmen können, falls uns (8) hierfür eine Lösung ergibt, d. h. falls ein solcher Kreis existiert.

Z. B. erhalten wir

$$R_1 = b; \quad n = \frac{b^2 n_1}{b^2 + R^2}. \tag{9}$$

* Straubel, l. c. p. 225.

Für den Brechungsexponenten (9) § 5 gibt es keinen Grundkreis, wie wir dies auch später in § 10 ersehen werden.

Nehmen wir nun an

$$n = \sqrt{\frac{e}{R} - M} \tag{10}$$

wo e und M positive Konstanten bedeuten, so ergibt sich,

$$R_1 = a; \quad 2a = \frac{e}{M}. \tag{11}$$

Es sei jetzt dl, Fig. 7 ein Element der Schnittkurve der geod. Kug. E um P_0 mit der Meridionalebene. Betrachten wir nun R und ϑ jetzt als die Koordinaten dieser Schnittkurve ($E =$ konst.), wobei sich also nur der Winkel γ ändern wird, so folgt

$$dl = -\frac{1}{\sin\delta}\frac{\partial R}{\partial\gamma}d\gamma = \frac{R}{\cos\delta}\frac{\partial\vartheta}{\partial\gamma}d\gamma; \quad E = \text{konst.} \tag{12}$$

Das Oberflächenelement df der geod. Kug. ist dann gleich

$$df = R\sin\vartheta dl d\varphi \tag{13}$$

wo $d\varphi$ das Winkelelement der Drehung der Meridionalebene um die X-Achse bedeutet. Beachten wir nun, dass hier $d\omega = \sin\gamma d\gamma d\varphi$ sein wird, so fliesst aus (22) § 4, (12), (13) und (4),

$$w^2 = -\frac{n^3 R^2 \sin\vartheta}{D\sin\gamma}\cdot\frac{\partial R}{\partial\gamma} = \frac{n^3 R^3 \sin\vartheta}{\sin\gamma\sqrt{n^2R^2 - D^2}}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\gamma} \tag{14}$$

wobei, wie schon erwähnt, die Deriviierten bei konstantem E zu nehmen sind. Diese Deriviierten bestimmen sich nun aus (6) und (5). Z. B. haben wir,

$$w^2 = \frac{\alpha E\sin\left(\frac{E\sin\gamma}{\alpha}\right)}{\sin\gamma}, \quad n = \frac{\alpha}{R} \tag{15}$$

und

$$w^2 = \frac{E^2(2\alpha\sqrt{R_0} + E\cos\gamma)}{\sqrt{4\alpha^2 R_0 + 4\alpha\sqrt{R_0}E\cos\gamma + E^2}}; \quad n = \frac{\alpha}{\sqrt{R}}. \tag{16}$$

Diese Werte genügen der Beziehung (2) § 5. Die Beziehung (5) § 5 können wir aber nicht anwenden, da der Nullpunkt ein singulärer Punkt für diese Brechungsexponenten sein wird.

Berechnen wir nun für die Brechungsexponenten (7) und (9) § 5 auf Grund von (14) die entsprechenden w, so erhalten wir die früher angegebenen Werte, wodurch ihre allgemeine Gältigkeit bewiesen ist. Wir kommen später noch darauf zurück (§§ 9 u. 10).

Wir berechneten die Werte von w ohne die Extremalen, d. h. ohne die Parameter λ^2 und λ^3 des § 4 zu kennen was bei (24) § 4 notwendig wäre, weshalb, wie dort hingewiesen, (22) § 4 bequemer ist.

Wir nehmen nun an, dass alle Extremalen geschlossene Kurven sind, bei beliebiger Lage des Punktes P_0, Fig. 8. Wir wissen aus der Variationsrechnung, dass dann die geod. Längen aller dieser geschlossenen Extremalen gleich und gleich L sein werden.* Die Grösse L ist demnach eine charakteristische Konstante des Raumes, und gibt uns die räumliche Periode an. Wir kommen noch später darauf zurück.

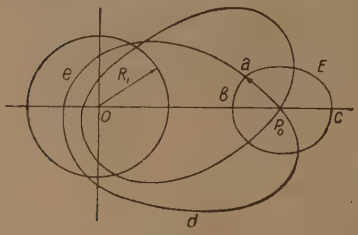


Fig. 8

Mit Hilfe des Grundkreises R_1 Fig. 8 (derselbe ergibt uns eine Kugel, da wir ja ein Rotationssystem haben) können wir nun sofort diese Grösse L berechnen. Da der Brechungsexponent längs dieses Kreises konstant und gleich $n(R_1)$ sein wird, so fogt demnach

$$L = 2\pi R_1 n(R_1). \tag{17}$$

Z. B. erhalten wir

$$L = \pi b n_1; \quad n = \frac{b^2 n_1}{b^2 + R^2} \tag{18}$$

und

$$L = 2\pi a \sqrt{M}; \quad n = \sqrt{\frac{e}{R} - M}. \tag{19}$$

Nun denken wir uns jetzt die geod. Kug. E um P_0 gezeichnet. Dieselbe ist dadurch entstanden, dass sie aus dem Punkt P_0 in Richtung des Pfeiles aufquillt. Bei allmäligen Vergrösserung von P_0a, wird sich die Kug. im allgemeinen in komplizierter Art verzerren (siehe § 14) um dann schlieslich wieder die Form *abc* anzunehmen. Hierbei wird sie sich aber in entgegengesetzter Richtung des Pfeiles, d. h. zu dem Punkt P_0 hin bewegen. Wenn in der ersten Lage die geod. Länge E durch die Extremale P_0a

* Hadamard, l. c., p. 150.

bestimmt ist, so wird in der zweiten Lage die geod. Länge E_1 durch die Extremale P_0 *dea* gegeben und demnach gleich

$$E_1 = L - E \tag{20}$$

eine Beziehung, die für uns später sehr wichtig sein wird (§ 11).

§ 9. Untersuchung des Falles (7) § 5. Der Brechungsexponent

$$n = \frac{b^2 n_1}{b^2 + R^2} \tag{1}$$

entspricht dem Maxwellschen Fischauge und wir wissen,* dass hierbei die Extremalen Kreise sein werden, die durch P_0 gehen Fig. 9. Denn laut (4) § 8 haben wir

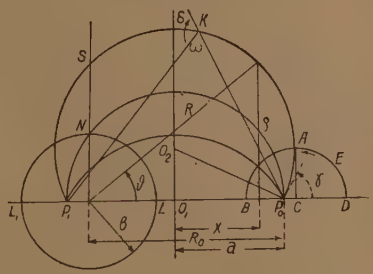


Fig. 9

$$\frac{b^2 n_1}{b^2 + R^2} \cdot p = D = \tag{2}$$

$$= R_0 n_0 \sin\gamma = \frac{R_0 b^2 n_1 \sin\gamma}{b^2 + R_0}$$

und hieraus

$$b^2 n_1 dp = 2DRdR \tag{3}$$

woraus zusammen mit der bekannten Beziehung

$$rdp = RdR \tag{4}$$

(r = Krümmungsradius) folgt

$$r = \frac{b^2 n_1}{2D} = \frac{b^2 + R_0^2}{2R_0 \sin\gamma} \tag{5}$$

also konstant. Das positive Zeichen bedeutet dass die Kreise mit ihrer konkaven Seite zum Koordinatenanfang gerichtet sind (siehe den folgenden § 10). Der Kreis mit dem Radius b um den Koordinatenanfang O, ist der Grundkreis (siehe (9) § 8).**

Da nun laut dem vorhergehenden § alle Krümmungsmittelpunkte auf der Geraden $O_1 O_2$, senkrecht zu OP_0 liegen, so ersehen wir, dass obige Kreise sich alle in dem Punkt P_1 schneiden werden, wobei

$$P_1 P_0 = 2O_1 P_0 = 2a \tag{6}$$

sein wird.

* Straubel, l. c., p 235.

** 0 = Koordinatenanfang und Mittelpunkt des Grundkreises mit dem Radius b ist versehentlich in der Fig. 9 nicht vermerkt.

Da nun augenscheinlich bei $\gamma = \frac{\pi}{2}$ in (4) $r = a$ sein wird, so ist

$$a = \frac{b^2 + R_0^2}{2R_0} \tag{7}$$

und hieraus

$$P_1 O = 2a - R_0 = \frac{b^2}{R_0} \tag{8}$$

d. h.*

$$P_1 O \cdot R_0 = b^2 \tag{9}$$

Demnach ersehen wir, dass falls P_0 von dem Punkt L auf dem Grundkreis bis nach links Unendlich geht, P_1 von L_1 nach O wandert. Umgekehrt, geht P_0 von L nach O, so wandert P_1 von L_1 nach rechts unendlich.

Aus (7) und der Fig. 9 folgt weiter

$$R_0 = a + \sqrt{a^2 - b^2} \tag{10}$$

und deshalb

$$OO_1 = R_0 - a = \sqrt{a^2 - b^2}. \tag{11}$$

Wir sind somit zu den bekannten peripolaren, oder Ringkoordinaten gekommen, deren Pole P_0 und P_1 sind. Die geod. Kug. ist jetzt tatsächlich eine Kugel, deren Schnitt mit der Meridionalebene der Fig. uns z. B. den Kreis BAD mit dem Mittelpunkt in C ergibt. Wir haben dann bekanntlich

$$O_1 C = \frac{1 + \lambda^2}{1 - \lambda^2} \cdot a \tag{12}$$

und für den Radius CA dieses Kreises erhalten wir

$$AC = \frac{2a\lambda}{1 - \lambda^2} \tag{13}$$

wobei λ im allgemeinen (Fig. 9)

$$\lambda = \frac{KP_0}{KP_1} \tag{14}$$

* Hieraus ergibt sich eine einfache Konstruktion der Fig. 9. Bei gegebenem b und der Lage von P_0 brauchen wir nur an die Strecke NP_0 (in der Fig. nicht gezeichnet) einen rechten Winkel bei N zu legen, woraus sich dann der Punkt P_1 bestimmt. Alles andere folgt von selbst auf Grund des Textes.

bedeutet und konstant entlang dem geod. Kreis BAD ist. Der Winkel ω bleibt konstant bei der Bewegung längs der Extremalen.

Ferner wird sein

$$x = \frac{(1-\lambda^2)M}{2}; \quad \rho = \lambda M \sin\delta \tag{15}$$

mit

$$M = \frac{2a}{1+2\lambda\cos\delta+\lambda^2} \tag{16}$$

falls wir statt ω den komplementären Wikel $\pi - \omega$ enführen.

Weiter erhalten wir für ein Linienelement ds im Raum,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = M^2 d\lambda^2 + M^2\lambda^2 d\delta^2 + M^2\lambda^2 \sin^2\delta d\varphi^2 \tag{17}$$

mit demselben $d\varphi$, wie im vorigen §

Aus (11) und der Fig. 9 fliesst,

$$R^2 = \left\{\sqrt{a^2-b^2}+x\right\}^2 + \rho^2 \tag{18}$$

und hieraus und (15) und (16), nach einigen Reduktionen

$$R^2 + b^2 = M\left\{a(1+\lambda^2) + (1-\lambda^2)\sqrt{a^2-b^2}\right\} \tag{19}$$

woraus sich dann, wegen (11) und (18) ergibt

$$n = \frac{b^2 n_1 R_0}{M(R_0^2+\lambda^2 b^2)}. \tag{20}$$

Nun sind λ und E längs dem geod. Kreis konstant. Wir wollen jetzt die Beziehung zwischen diesen Grössen aufstellen.

Unter Beachtung von (17) erhalten wir

$$E = \int_0^s n ds = \int_0^\lambda n M d\lambda = b^2 n_1 R_0 \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{R_0^2+\lambda^2 b^2} = b n_1 \operatorname{arctg}\frac{\lambda b}{R_0}. \tag{21}$$

D. h.

$$\lambda = \frac{R_0}{b}\operatorname{tg}\frac{E}{b n_1} \tag{22}$$

was die gesuchte Beziehung liefert.

Analog dem vorhergehenden § und wegen (17) erhalten wir für das Oberflächenelement df der geod. Kug.

$$df = -M^2 \lambda^2 \sin\delta \cdot d\delta d\varphi. \tag{23}$$

Das negative Zeichen erklärt sich dadurch, dass wir das Linienelement des geod. Kreises in Richtung des Pfeiles, also entgegengesetzt der Vergrösserung von δ rechnen um im Einklang mit der Richtung der Vergrösserung von γ zu sein. Da nun augenscheinlich $\gamma = \pi - \delta = \omega$ und deshalb

$$\sin\gamma = \sin\delta$$

und $d\delta = -d\gamma$ sein wird, so ergibt uns (23) wegen (20)

$$w^2 = \frac{b^4 n_1^2 R_0^2 \lambda^2}{(R_0^2 + \lambda^2 b^2)^2} \tag{24}$$

oder auf Grund von (22)

$$w = \frac{bn_1}{2} \sin\left(\frac{2E}{bn_1}\right) \tag{25}$$

in Uebereinstimmung mit dem Früheren. Hier ist, im Gegensatz zu § 8 der Wert von w mit Hilfe der Kenntniss der Extremalen berechnet worden.

Die geod. Kug. quillt vom Punkt P_0 aus, wobei ihr Mittelpunkt C nach rechts Unendlich strebt, und geht in eine Ebene über, deren Schnitt die Gerade $O_1 O_2$ ist. Weiterhin erhalten wir wieder eine Kugel mit dem Mittelpunkt links von P_1, welche dann in den Punkt P_1 zusammenschrumpft. Beim Durchgang durch diesen Punkt kehrt die Kugel ihre Innenseite nach aussen und kommt schliesslich in die Lage BAD zurück. Hierbei ist das am Schluss des § 9 Gesagte zu beachten.

Zum Schluss noch eine Bemerkung.

Wegen der Zentralsymmetrie von n wissen wir, dass OS und OP_0 geod. Linien sein werden. Deshalb ist OSP_0 ein geod. Dreieck bei welchem (man brauch ja nur S und P_0 durch eine Gerade zu verbinden) die Summe der inneren Winkel $>$ als π sein wird.

§ 10. **Untersuchung des Falles (9) § 5.** Der Brechungsexponent ist jetzt

$$n = \frac{b^2 n_1}{b^2 - R^2}. \tag{1}$$

Auf analoge Weise wie (5) § 9 erhalten wir für die Krümmung,

$$r = -\frac{b^2 n_1}{2D} = -\frac{b^2 - R_0^2}{2R_0 \sin\gamma}. \tag{2}$$

D. h. ebenfalls Kreise, deren Radien, dem Absolutwert nach gleich (5) § 9 sind. Das Minuszeichen in (2) weisst darauf hier die Kreise mit der konvexen Seite zum Koordinatenanfang hin gerichtet sind. Der Koordinatenanfang liegt dehalb rechts von P_0 in Fig. 9 und, wie wir sofort beweisen wollen in C, falls wir $CA = b$ machen.

Bezeichnen wir den Wert von λ für $CA = b$ durch λ_0, so folgt aus (13) § 9

$$b = \frac{2a\lambda_0}{1-\lambda_0^2}. \tag{3}$$

Ferner ergibt uns (12) § 9 und Fig. 9

$$P_0C = O_1C - a = \frac{2a\lambda^2}{1-\lambda_0^2} = R_0. \tag{4}$$

(Falls wir vorgreifend P_0C durch R_0 bezeichnen). Deshalb wegen (3)

$$\frac{R_0}{b} = \lambda_0 \tag{5}$$

und dann wieder auf Grund von (3)

$$2a = \frac{b^2 - R_0^2}{R_0} \tag{6}$$

in Übereinstimmung mit (2) falls wir dort das Vorzeichen wechseln und beachten, dass für $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $r = 2a$ sein muss. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Indem wir also in Fig. 9, $AC = b$ machen und den Teil der Fig. 9, welcher innerhalb dieses Kreises liegt ausschneiden, erhalten wir die Fig. 10, welche demnach dem Brechungsexponent (1) entspricht.

Aus (6) und der Fig. 10 folgt

$$R_0 = -a + \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{7}$$

Weshalb aus der Fig. 9 für das R der Fig. 10 folgt

$$R^2 = \left\{\sqrt{a^2 + b^2} - x\right\}^2 + \rho^2 \tag{8}$$

und hieraus auf Grund von (15) und (16) § 9 analog (19) § 9

$$b^2 - R^2 = M\left\{(1-\lambda^2)\sqrt{a^2 + b^2} - a(1+\lambda^2)\right\}. \tag{9}$$

weshalb wegen (7) und (6) für den Brechungsexponenten (1) folgt

$$n = \frac{b^2 n_1 R_0}{M(R_0^2 - \lambda^2 b^2)}. \tag{10}$$

Analog (21) § 9 erhalten wir dann

$$(11)\qquad E = b^2 n_1 R_0 \int_0^{\lambda} \frac{d\lambda}{R_0^2 - \lambda^2 b^2} = bn_1 \operatorname{arctgh} \frac{\lambda b}{R_0} = \frac{bn_1}{2} \lg \frac{R_0 + b\lambda}{R_0 - b\lambda}$$

d. h.

$$(12)\qquad \lambda = \frac{R_0}{b} \operatorname{tgh} \frac{E}{bn_1}.$$

Wegen (5) folgt dann für $\lambda = \lambda_0$, $E = \infty$. Demnach sind die geod. Längen aller Extremalen von P_0 aus bis zum Grenzgreis b der Fig. 10 unendlich gross.

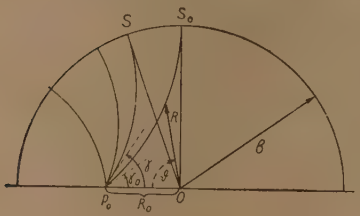


Fig. 10

Ferner erhalten wir, analog (25) § 9,

$$(13)\qquad w = \frac{bn_1}{2} \sinh\left(\frac{2E}{bn_1}\right)$$

wieder in Übereinstimmung mit dem früheren Wert.

Die geod. Kugel geht auch hier vom Punkte P_0 aus, wird aber den Grenzkreis erst nach unendlich langer Zeit erreichen.

Das Dreieck SP_0O ist ebenfalls ein geodätisches und die Summe seiner inneren Winkel ist $<$ als π.

Im speziellen betrachten wir das Dreieck P_0S_0O. Da P_0S_0 in S_0 die Gerade OS_0 tangiert, so folgt aus der Fig. 9, dass der entsprechende Winkel

$$O_2 P_0 O_1 = \frac{\pi}{2} - \gamma_0$$

ist und $O_1O_2 = r\cos\gamma_0 = b$.* Demnach erhalten wir aus (2) (falls wir dort das Pluszeichen setzen)

$$(14)\qquad \operatorname{tg}\gamma_0 = \frac{b^2 - R_0^2}{2R_0 b}$$

und deshalb,

$$(15)\qquad \operatorname{ctg}\frac{\gamma_0}{2} = \frac{b + R_0}{b - R_0}.$$

* Hieraus ergibt sich eine einfache Konstruktion der Fig. 10, bei gegebenem b und der Lage des Punktes P_0. Wir ziehen durch S_0 (S_0O ist senkrecht zu P_0O) eine Parallele zu P_0O und bestimmen auf ihr einen Punkt M so, dass ein Kreis mit dem Mittelpunkt in M durch P_0 und S_0 durchgeht. Legen wir nun dann durch M eine Parallele zu S_0O, so werden auf derselben die Mittelpunkte aller Kreise (Extremalen) liegen, die durch P_0 gehen.

Bezeichnen wir die geod. Länge von OP_0, Fig. 10 durch E_0, so ist,

$$E_0 = b^2 n_1 \int_0^{R_0} \frac{dR}{b^2 - R^2} = b n_1 \operatorname{arctgh} \frac{R_0}{b} \tag{16}$$

und deshalb

$$\frac{R_0}{b} = \operatorname{tgh}\left(\frac{E_0}{b n_1}\right). \tag{17}$$

Hieraus uns (20) folgt

$$\operatorname{cotg} \frac{\gamma_0}{2} = e^{\frac{2E_0}{b n_1}} \tag{18}$$

auf welche Beziehung wir später zurückkommen werden (§ 16).

§ 11. **Integration der Differentialgleichung.** Wir wollen jetzt die Gleichung (1) resp. (11) § 6 integrieren, wobei wir laut (11) § 7 $h = -m^2$ setzen und erhalten dann

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{\varphi m^2}{4} = 0 \tag{1}$$

haben es also dann mit dem Brechungsexponenten des § 9 zu tun.

Statt der Variablen ζ und η führen wir vorübergehend die folgenden

$$\zeta_1 = m\zeta; \quad \eta_1 = m\eta \tag{2}$$

ein, weshalb sich statt (1) ergibt,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta_1 \partial \eta_1} + \frac{\varphi}{4} = 0. \tag{3}$$

Auf Grund der Anfangsbedingungen (19) § 6 erhalten wir nun,

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= A_1(E) = \frac{\sin(mE)}{4\pi m} \int_F A_E \, d\omega \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= G_1(E) = \frac{\sin(mE)}{4\pi m} \int_F G_E \, d\omega \end{aligned}\right\} t = 0. \tag{4}$$

Bevor wir weiter gehen müssen wir diese Ausdrücke näher untersuchen. Es sei B, Fig. 11, der Bereich innerhalb welchem die Anfangsbedingungen A und G gegeben sind, weshalb wir also die Funktionen unter den Integralen in (4) als bekannt voraussetzen müssen.

Da wir es hier mit geschlossenen Extremalen zu tun haben, so ergibt uns das Vorhergehende, dass die Integrale in (4) räumlich periodisch, mit der Periode L sein werden. Demnach müssen sie sich in eine Reihe mit Gliedern

$$\sin\frac{2\pi sE}{L}, \quad \text{resp. } \cos\frac{2\pi sE}{L}$$

entwicklen lassen.

Die geod. Kug. E habe die Lage wie in der Fig. 11. Nun wissen wir laut (20) § 8, dass falls E den Wert $E_1 = L - E$ annimmt, die geod. Kug. genau dieselbe Lage, wie in der Fig. 11 haben wird. Demnach muss also für $L - E$ die obige Reihe denselben Wert ergeben. Daraus folgt aber, dass nur Glieder mit Kosinussen vorhanden sein können.

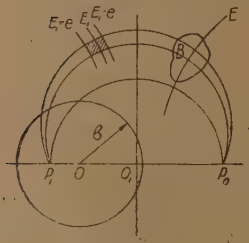


Fig. 11

Wir können also schreiben,

$$(5) \qquad \int_F A_E\, d\omega = \sum_{s=0}^{\infty} c_s \cos(msE)$$

und

$$(6) \qquad \int_F G_E\, d\omega = \sum_{s=0}^{\infty} d_s \cos msE$$

mit

$$(7) \qquad m = \frac{2\pi}{L} = \frac{2}{bn_1}$$

laut (18) § 8.

Mit Hilfe der Riemannschen Methode erhalten wir sofort eine Lösung von (2) und zwar wird sein,*

$$\varphi(E, ct) = f(\zeta_1, \eta_1) = \frac{1}{2}\{A_1(E - ct) + A_1(E + ct)\} +$$

$$(8) \qquad + \frac{mct}{2} \int_{m(E-ct)}^{m(E+ct)} A_1\left(\frac{y}{m}\right) \frac{J_1\left(\sqrt{(y - mE)^2 - m^2 c^2 t^2}\right)}{\sqrt{(y - mE)^2 - m^2 c^2 t^2}}\, dy +$$

$$+ \frac{1}{2cm} \int_{m(E-ct)}^{m(E+ct)} G_1\left(\frac{y}{m}\right) J_0\left(\sqrt{(y - mE)^2 - m^2 c^2 t^2}\right) dy$$

* Siehe z. B. Webster-Szegö. Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Lpz., Teubner, 1930, p. 300.

oder nach Aenderung der Integrationsvariablen,

$$\varphi(E, ct) = f(\zeta_1, \eta_1) = \frac{1}{2}\{A_1(E-ct) + A_1(E+ct)\} +$$

$$+ \frac{mct}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} A_1(E + ct\sin\varphi)\, I_1(mct\cos\varphi)\, d\varphi + \tag{9}$$

$$+ \frac{t}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} G_1(E + ct\sin\varphi)\, I_0(mct\cos\varphi)\cos\varphi\, d\varphi$$

wobei wie gewöhnlich

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \tag{10}$$

bedeutet.

Auf Grund (4) und (5) erhalten wir nun

$$A_1(E) = \frac{c_0 \sin mE}{8\pi m} + \sum_{s=0}^{\infty} (c_s - c_{s+2}) \sin m(s+1)E \tag{11}$$

und ein ähnlicher Ausdruck für $G_1(E)$, welcher aus (11) folgt, falls wir dort statt der c_s die d_s einführen.

Weiter folgt wegen (11),

$$A_1(E + ct\sin\varphi) = \frac{c_0 \sin mE \cdot \cos(mct\sin\varphi)}{8\pi m} + \frac{c_0 \cos mE \cdot \sin(mct\sin\varphi)}{8\pi m} +$$

$$+ \frac{1}{8\pi m}\sum_{s=0}^{\infty} (c_s - c_{s+2}) \sin m(s+1)E \cdot \cos[mct(s+1)\sin\varphi] + \tag{12}$$

$$+ \frac{1}{8\pi m}\sum_{s=0}^{\infty} (c_s - c_{s+2}) \cos m(s+1)E \cdot \sin[mct(s+1)\sin\varphi]$$

und ein ähnlicher Ausdruck für $G_1(E + ct\sin\varphi)$.

Setzen wir nun diese alles in (9) ein, so ersehen wir, dass die Glieder mit $\sin[mct(s+1)\sin\varphi]$ bei der Integration keinen Beitrag liefern werden.

Berücksichtigen wir ferner die leicht zu ableitende allgemeine Bezichung

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(at\sin\varphi)\frac{I_n(bt\cos\varphi)\cos\varphi}{\cos^n\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\left(\frac{2}{a}\right)^{n+1/2}\left(\frac{a^2}{2b}\right)^n \cdot$$

(13)

$$\left\{\frac{J_{1/2-n}(t\sqrt{a^2-b^2})}{a^{n-1/2}(\sqrt{a^2-b^2})^{1/2-n}} - \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{2\mu}\left(\frac{at}{2}\right)^{\mu}J_{\mu+1/2-n}(at)}{\mu!}\right\}$$

so erhalten wir nach einigen elementaren Reducktionen

$$\varphi(E, ct) = \frac{(2c_0 - c_2)\sin mE}{8\pi m} +$$

$$+\frac{1}{8\pi m}\sum_{s=1}^{\infty}(c_s - c_{s+2})\sin m(s+1)E\cdot\cos\left[mct\sqrt{(s+1)^2-1}\right] +$$

(14)

$$+\frac{t(2d_s - d_2)\sin mE}{8\pi m} +$$

$$+\frac{1}{8\pi m}\sum_{s=1}^{\infty}(d_s - d_{s+2})\sin m(s+1)E\cdot\frac{\sin\left[mct\sqrt{(s+1)^2-1}\right]}{\sqrt{(s+1)^2-1}}$$

welches Resultat der Bedingung (21) § 6 genügt, Hieraus und der rechten Seite von (17) § 6 folgt dann entgültig,

$$u_0(t) = \frac{2c_0 - c_2}{8\pi} +$$

(15)

$$+\frac{1}{8\pi}\sum_{s=1}^{\infty}(c_s - c_{s+2})(s+1)\cos\left[mct\sqrt{(s+1)^2+1}\right] +$$

$$+\frac{t(2d_0 - d_2)}{8\pi} + \frac{1}{8\pi}\sum_{s=1}^{\infty}(d_s - d_{s+2})(s+1)\frac{\sin\left[mct\sqrt{(s+1)^2-1}\right]}{\sqrt{(s+1)^2-1}}$$

welche für den Punkt P_0 gültig sein wird, bei den Anfangsbedingungen (19) § 6 im Bereiche B der Fig. 11.

Aus (15) ersehen wir, dass hierbei ein Glied vorkommt, welches mit der Zeit unbegrenzt wächst und welches von der Bedingung G abhängt, also gewissermassen vom Schlag.

§ 12. **Beispiel zu § 11.** Als Bereich für die Anfangsbedingungen, nehmen wir das schraffierte Gebiet in der Fig. 11 an, welches sich also zwischen zwei Extremalen und zwischen zwei geod. Kug. $E - e$ und $E + e$ befindet.

Setzen wir ferner Unabhängigkeit der Anfangsbedingungen von ω voraus so haben wir

$$\int_F A_E d\omega = A(E) \int_F d\omega = A_2(E) \tag{1}$$

und

$$\int_F G_E d\omega = G(E) \int_F d\omega = G_2(E). \tag{2}$$

Wir nehmen jetzt $A_2(E) = 0$ an und setzen ferner

$$G_2(E) = K \cos\left\{\frac{\pi}{2e}(E - E_1)\right\} \tag{3}$$

für

$$E_1 - e \leqq E \leqq E_1 + e \tag{4}$$

und gleich Null, ausserhalb dieser Grenzen. K ist eine Konstante. An diesen Grenzen geht der Wert von (3) kontinuierlich zu Null über.

Wegen (6) § 11 schreiben wir nun

$$G_2(E) = K \cos\left\{\frac{\pi}{2e}(E - E_1)\right\} = \sum_{s=0}^{\infty} d_s \cos(msE) \tag{5}$$

und erhalten dann

$$Ld_0 = K \int_{E_1 - e}^{E + e} \cos\left\{\frac{\pi}{2e}(E - E_1)\right\} dE = \frac{4eK}{\pi} \tag{6}$$

und falls wir ausserdem setzen

$$\frac{4se}{L} = 1 + \delta_s; \quad \delta_0 = -1; \quad \delta_1 = \frac{4e}{L} - 1 \tag{7}$$

für die d_s

$$\frac{Ld_s}{2} = \frac{4eK}{\pi} \frac{\cos\frac{2\pi se}{L} \cdot \cos\frac{2\pi sE_1}{L}}{1 - \left(\frac{4se}{L}\right)^2} = \frac{4eK \sin\left(\frac{\pi\delta_s}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi sE_1}{L}\right)}{\pi\delta_s(2 + \delta_s)}. \tag{8}$$

Hieraus folgt

$$\frac{2d_0 - d_2}{8\pi} = \frac{eK}{\pi^2 L}\left\{1 - \frac{\cos\frac{4\pi e}{L} \cdot \cos\frac{4\pi E_1}{L}}{1 - \left(\frac{8e}{L}\right)^2}\right\} \tag{9}$$

was bei sehr kleinem e, im Verhältniss zu L übergeht in

$$\frac{2d_0 - d_2}{8\pi} = \frac{2eK\sin^2}{\pi^2 L}\left(\frac{2\pi E_1}{L}\right) \tag{10}$$

welches das mit der Zeit unbegrenzt wachsende Glied in (15) § 11 angibt.

Aus (8) ersehen wir, dass d_s auch für $\delta_s = 0$ endlich bleibt.

Ferner bemerken wir, dass, da die Anfangsbedingungen fest im Raume sind, das Obiges nur bei der gewählzen Lage von P_0 gültig sein wird.

§ 13. **Einige Bemerkungen zu dem Vorhergehendem.** Die §§ 11 und 12 beziehen sich auf die Gleichung (1) resp. (11) § 6 und führten uns zu einem mit der Zeit unbegrenzt wachsendem Glied. Physikalisch können wir dies dadurch erklären, dass wir keine «Ableitung» angenommen (siehe § 7) haben. Berücksichtigen wir aber diese, d. h. gehen zu der Gleichung (12) § 7 über, so folgt sofort das Poissonschen Integral (13) § 7. Nehmen wir auch hier $A = 0$ an, so ergibt sich,

$$u_0(t) = \frac{\sin(mct)}{4\pi cm}\int_F G_{E=ct}\, d\omega. \tag{1}$$

Dies ist aber laut (4) § 11 nichts anderes als das zu (11) § 11 entsprechende Ausdruck für $G_1(E)$, falls wir in diesem ct an Stelle von E setzen und noch durch c teilen. Demnach erhalten wir,

$$u_0(t) = \frac{T(2d_0 - d_2)}{16\pi^2}\sin\frac{2\pi t}{T} + \sum_{s=1}^{\infty}(d_s - d_{s+2})\sin\frac{2\pi(s+1)t}{T}. \tag{2}$$

Woraus wir ersehen, dass bei Einführung der «Ableitung» wir einen in Bezug auf die Zeit reinen periodischen Zustand mit der Periode $T = \frac{L}{c}$ erhalten. Denn es ist

$$mc = \frac{2\pi c}{L} = \frac{2\pi}{T}. \tag{3}$$

Also können wir die geod. Länge einer geschlossenen Extremale und insbesondere diejenige des Gründkreises als Wellenlänge auffassen.

Wir betrachten nun das Poissonsche Integral (17) § 7, welches der Gleichung (16) § 7 entspricht und sich auf den in § 10 untersuchten Fall bezieht. In dem Poissonschen Integral setzen wir nun wieder $A = 0$ und erhalten dann

$$u_0(t) = e^{-mct}\frac{\sinh(mct)}{4\pi cm}\int_F G_{E=ct}\, d\omega = \frac{1 - e^{-2mct}}{8\pi cm}\int_F G_{E=ct}\, d\omega. \tag{4}$$

Ferner nehmen wir an G sei in dem schraffierten Gebiet der Fig. 12, welches einerseits zwischen dem Grenzkreis b und der geod. Kug. E_1 und anderseits zwischen Extremalen liegt, gegeben. Endlich sei G von ω und E unabhängig.

Dann ist der Wert des Integrals in (4) gleich einer Konstanten B und nach einiger Zeit können wir deshalb statt (4) schreiben,

$$u_0(t) = \frac{B}{8\pi cm}. \tag{5}$$

Hiervon können wir uns nun folgendes physikalisches Bild machen.

Von dem Moment t_1 an, wo die geod. Kug. E die Lage E_1 erreicht hat, fängt die Wirkung in P_0 an. Nach einiger Zeit wird dieselbe, laut (5) konstant. Da nun laut § 10 die geod. Länge bis zu dem Grenzkreis undendlich gross ist, so brauch die geod. Kug. E, wegen (4) § 2 die unendlich grosse Zeit $t = \frac{E}{c}$ bis sie den Grenzkreis, resp. Grenzkugel erreicht. D. h. also, fasst der in P_0 befindliche Beobachter die Grenzkugel als die, nach dem eben Gesagtem, unendlich entfernte, Grenze des Raumes an, so wird er durch die oben eingeführte Anfangsbedingung G, im Moment t_1 einen neuen Stern endeckt zu haben glauben, der ihm ewig leuchten wird.*

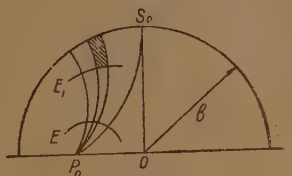


Fig. 12

Nach dieser kleinen Abschweifung kehren wir wieder zur Wirklichkeit zurück und bemerken, dass wir hier den Konstanten Wert (5) deshalb erhielten, weil wir in § 7 aus der Gleichung (16) ausgingen, d. h. die die zeitliche Dämpfung bedingende Grösse $q = \frac{m}{c}$ setzten.

Wir können aber ein Poissonscher Integrale auch aus der allgemeinen Gleichung (6) resp. (8) § 7 erhalten, falls wir, indem wir von dem Brechungsexponen (10) § 7 ansgehen, setzen

$$m^2 = k^2 - c^2 q^2 \tag{6}$$

wobei die rechte Seite positiv sein muss.

Gehen wir von dem Brechungsexponenten (14) § 7 aus, so müssen wir statt (6) schreiben,

$$m^2 = c^2 q^2 - k^2 \tag{7}$$

ebenfalls mit einer positiven rechten Seite.

* Man braucht ja nur G in (4) periodisch nach E anzunehmen.

Es wird hierbei bei den entsprechenden Poissonschen Integralen immer der Faktor e^{-qc^2t} stehen. Im Falle (7) bei $k > 0$ wird immer $q > \frac{m}{c}$ sein, und wir erhalten eine zeitliche Dämpfung.

Ist die Beziehung (6) aus irgend welchem Grund nicht erfüllt, so schreiben wir

$$m^2 - (k^2 - c^2 q^2) = \beta^2 \tag{8}$$

wobei also die linke Seite positiv angenommen ist. Wir kommen so zu dem Typus der Gl. (1) § 11 mit der entsprechenden Lösung, wobei wir berücksichtigen müssen, dass in (8) § 11 statt m jetzt β zu setzen ist, wärend in (11) und (12) § 11 das m stehen bleibt. Ausserdem ist wegen (7) § 7 alles noch mit e^{-qc^2t} zu multiplizieren.

§ **14. Noch ein Beispiel.** Wir wollen nun den Brechungsexponent (10) § 8

$$n = \sqrt{\frac{e}{R} - M} \tag{1}$$

näher untersuchen. Der Radius R_1 des Grundkreises ist

$$R_1 = a; \quad 2a = \frac{e}{M} \tag{2}$$

und laut (19) § 8

$$L = 2\pi a \sqrt{M}. \tag{3}$$

Dieser Fall ist bei Hadamard und Straubel* kurz gestreift. Die Extremalen sind Ellipsen, alle mir derselben grossen Achse $2a$. Ein Brennpunkt liegt immer im Koordinatenanfang.

Die genauere Untersuchung, von welcher wir nur die hier notwendigen Resultate angeben können, ergibt folgendes.

Unter der Annahme, dass die Ellipse durch den Punkt P_0 geht mit dem Winkel γ haben wir für dieselbe (Fig. 13),

$$R = \frac{b^2}{a - \sqrt{a^2 - b^2}\cos(\vartheta - \varphi)} \tag{4}$$

wobei sich die kleine Halbachse b bestimmt aus

$$b = \sin\gamma \sqrt{a^2 - N^2} \tag{5}$$

* Hadamard, l. c., p. 131 und Straubel, l. c. p. 234.

mit $CP_0 = N$. ($C =$ der Schnittpunkt des Grundkreises mit der Strecke OB). Der Winkel φ berechnet sich aus

$$(6) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\gamma \cdot (a-N)}{a + N\operatorname{tg}^2\gamma} = \frac{b\sqrt{a^2-N^2-b^2}}{a^2+aN-b^2}.$$

Da die Entfernung von O bis zum Mittelpunkt M der Ellipse gleich

$$\sqrt{a^2-b^2}$$

ist, so wird demnach die Ellipse bei gegebener Lage von P_0 ($R_0 = a + N$) und gegebenem γ, vollkommen bestimmt sein, wobei sie durch P_0 durchgehen wird. Die Senkrechte zu OM in M ergibt ferner durch ihre Schnittpunkte P_1 und P_2 mit dem Grundkreis, die kleine Halbachse MP_1, was mit (5) übereinstimmen muss.

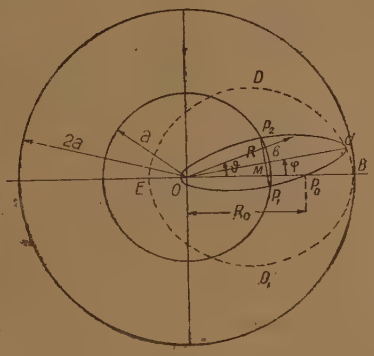


Fig. 13

Bei Aenderung des Winkels γ erhalten wir verschiedene Ellipsen die eine Umhüllende $BDED_1B$* haben werden deren Gleichung lautet

$$(7) \qquad R = \frac{B^2}{A - \sqrt{A^2-B^2}\cos\vartheta}$$

mit

$$(8) \qquad A = \frac{3a-N}{2}; \quad B = \sqrt{2a(a-N)}$$

also auch eine Ellipse, deren Halbachsen durch (8) gegeben sind.

Wie in § 10 haben wir auch hier eine Grenzkugel mit dem Radius $2a$ und die obige Umhüllende tangiert dieselbe immer im Punkt B.

Wir bezeichnen durch V das Volumen zwischen der Grenzkugel und der Umhüllenden. Auf Grund der Erörterungen in der Einleitung ist nun klar, dass bei beliebigen Anfangsbedingungen, deren Bereich innerhalb V liegt und dasselbe nur teilweise ausfüllt; um P_0 herum Gebiete auftreten können, die vollkommen frei von jeglicher Wirkung sein werden.

Gehen wir z. B. vom Punkt P_1 aus, so ist hierbei die goed. Länge $P_1dP_2 >$ als P_1bP_2 und wir können die erstere Linie als den reflektierten (an der Umhüllenden) und die zweite als den direckten Strahl von P_1 aus auffassen.

* Der zweite Teil ED_1B dieser Umhüllenden ist dadurch bedingt, dass wir ja ein Rotationssystem haben.

§ 15. **Potential.** Die Laplacesche Gleichung für homogene Medien lautet

$$div\nabla u = 0. \tag{1}$$

Es ist nun klar, dass wir für inhomogene Medien, wegen (1) § 6

$$divn\nabla u = 0 \tag{2}$$

setzen müssen, welche Gleichung für diesen Fall die Laplacesche Gleichung vertreten wird.

Nun ist bekanntlich $\frac{1}{r}$ eine singuläre Lösung von (1), welche im Punkt P_0 (r von P_0 aus gerechnet) unendlich wird. Eine ebensolche Lösung wollen wir auch für (2) aufstellen, indem wir, wegen (1) § 5 fordern

$$u = \frac{1}{E}; \quad E \to 0. \tag{3}$$

Es ist nun naheliegend in (2) $u = \frac{1}{E}$ su setzen. (Siehe Anmerkung.) Dieser Wert genügt aber der Gl. (2) nicht.

Bevor wir zur Lösung von (2) übergehen, wollen wir noch einen allgemeinen Satz beweisen. Um P_0 legen wir die geod. Kug. E und irgend eine Fläche F, die die Kugel umschliesst. Innerhalb des Volumens V, zwischen beiden Flächen, wird also u regulär sein und wegen (2) folgt dann

$$\int_V divn\nabla u dv = \int_F n\frac{du}{dN}df - \int_{F_1} n\frac{du}{dN}df = 0 \tag{4}$$

wo F_1 die Oberfläche der geod. Kug. bedeutet und in beiden Integralen die äussere Normale zu verstehen ist. Laut dem Früheren folgt aus (4)

$$\int_F n\frac{du}{dN}df = \int_{F_1} w^3\frac{du}{dE}d\omega. \tag{5}$$

Lassen wir nun die geod. Kug. in den Punkt P_0 zusammenschrumpfen, so ergibt sich aus (5), beim Grenzübergang wegen (2) § 5

$$\int_F n\frac{du}{dN}df = -4\pi \tag{6}$$

d. h. der Gausssche Satz.

Bei Einführung geod. Koordinaten erhalten wir aus (23) § 4 statt (2)

$$\frac{\partial w^2\frac{\partial u}{\partial E}}{w^2\partial E} + D = 0. \tag{7}$$

Kehren wir nun zu unserer Annahme zurück, dass sich w längs der geod. Kug. nicht ändert, ausserdem, dass u nur von E abhängt und setzen ferner

$$\frac{du}{dE} = -\frac{1}{w^2} \tag{8}$$

so verschwindet laut § 4, D und wegen (8) auch das erste Glied in (7). Die Gl. (2) wird also erfüllt.

Ausserdem ergibt uns (8), wegen (2) § 5

$$\frac{du}{dE} = \frac{d\frac{1}{E}}{dE}; \quad E \to 0 \tag{9}$$

und hieraus

$$u = \frac{1}{E} + C; \quad E \to 0 \tag{10}$$

wo C eine Konstante bedeutet, wodurch auch der Bedingung (3) genügt wird.

Für (7) § 5 erhalten wir demnach sofort,

$$u = \frac{m}{\operatorname{tg} mE}; \quad n = \frac{b^2 n_1}{b^2 + K^2} \tag{11}$$

und für (9) § 5

$$u = \frac{m}{\operatorname{tgh} mE}; \quad n = \frac{b^2 n_1}{b^2 - K^2}. \tag{12}$$

Wir könnten weiter über die Kräfte u. s. w. diskutieren, wollen aber dies hier unterlassen und kommen vielleicht an anderer Stelle darauf zurück.

Die Konstante C in (10) haben wir in (11) und (12) weggelassen. In einer späteren Arbeit werden wir zeigen; dass diese Konstante eine Rolle spielen wird.

Anmerkung. Bezeichnen wir durch $a, b, c,$ die Hauptbrechungsexponenten in einem Kristall so haben wir,

$$dS^2 = a^2\,dx^2 + b^2\,dy^2 + c^2\,dz^2, \tag{a}$$

Die Extremalen sind gerade Linien und die geod. Kugel wird ein Ellipsoid,

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1, \tag{b}$$

mit den Halbachsen,

$$= \frac{E}{a}; \quad B = \frac{E}{b}; \quad C = \frac{E}{c}. \tag{c}$$

Ist $E = 1$ so geht (b) in das Fresnelsche Ellipsoid über. Hierbei ist,

(d) $$E = s\sqrt{a^2\dot{x}^2 + b^2\dot{y}^2 + c^2\dot{z}^2} = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2}$$

und die der Gleichung (2) des Textes entsprechende Laplacesche Gleichung lautet

(e) $$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

deren singuläre Lösung, welche im Punkte P_0 unendlich wird, ist eben in diesem Fall einfach

$$u = \frac{1}{E}$$

(siehe z. B. É. Mathieu. Theorie des Potentials. Berlin, Springer, 1890, p. 106—109).

§ 16. **Krümmungsmass und allgemeine Bemerkungen.** Bei der angenommenen Zentralsymmetrie des Brechungsexponenten hatten wir es immer mit Extremalen in der Meridionalebene zu tun deren Linienelement wir laut (1) § 8 darstellen können durch,

(1) $$dS^2 = n^2(R)\{dR^2 + R^2 d\vartheta^2\},$$

oder falls wir die Variable

(2) $$u = \int_0^R n(R)\,dR$$

einführen, satt (1)

(3) $$dS^2 = du^2 + G d\vartheta^2$$

mit

(4) $$\sqrt{G} = Rn(R).$$

Betrachten wir nun (4) vom Standpunkt der Differentialgeometrie als Linienelement einer Fläche, deren Krümmungsmass K,

(5) $$K = \frac{1}{r_1 r_1} = \frac{1}{r_2}$$

ist, so haben wir bekanntlich

(6) $$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

Hieraus ergibt sich sofort, da

(7) $$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial R}\frac{dR}{du} = \frac{1}{n(R)}\frac{\partial}{\partial R}$$

sein wird,

$$K = \frac{4}{b^2 n_1^2} = \frac{1}{r^2}; \quad n = \frac{b^2 n_1}{b^2 + R^2} \tag{8}$$

d. h. das Krümmungsmass ist konstant und positiv und

$$K = -\frac{4}{b^2 n_1^2} = -\frac{1}{r^2}; \quad n = \frac{b^2 n_1}{b^2 - R^2} \tag{9}$$

d. h. das Krümmungsmass ist konstant und negativ.

Wir wollen nun umgekehrt die Form von n in ihrer Abhängigkeit von R als unbekannt auffassen. Dann erhalten wir wegen der Bedingung (1) § 4 d. h.

$$n > 0 \tag{10}$$

aus (1) und (4)

$$\sqrt{G} = 0; \quad \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 1; \quad \text{für } u = 0 \tag{11}$$

Für diesen Fall haben wir* als Bedingung eines konstanten Krümmungsmasses K, für $K > 0$

$$\sqrt{G} = r \sin \frac{u}{r} \tag{12}$$

und für $K < 0$

$$\sqrt{G} = r \sin h \frac{u}{r} \tag{13}$$

(elliptischer Fall).

Die Integration dieser beiden Gleichungen auf Grund von (2) und (4) ergibt, bei entsprechender Wahl der Integrationskonstanten, genau die Brechungsexponenten (8) und (9).

Hierdurch ist die allgemeine Beziehung auf welche wir in § 5 hingewiesen haben, hergestellt.**

* Kommerell, l. c. Bd. II, p. 84 u. ff.

** Allgemein haben wir bekanntlich folgendes. Setzen wir in (8) § 3

$$q = \frac{1}{U} \tag{a}$$

und hat U die Form

$$U = \sum_1^n X_i \tag{b}$$

Bei positivem Krümmungsmass können wir (3) auf eine Kugelfläche abbilden. Dann erhalten wir statt der Fig. 9 § 9 eine Kugel mit den Polen P_0 und P_1. Die Extremalen werden durch die Meridiane dargestellt und die Breitenkreise entsprechen den geod. Kreisen der Fig. 9.

Diese Breitenkreise bewegen sich, z. B. von dem Nordpol ausgehend, über den Aequator durch, nach dem Südpol, bei dem Durchgang durch welchen sie, laut der Bemerkung am Schluss des § 9, ihre Innenseite nach aussen wenden, und kehren dann zum Nordpol zurück.

Beim negativen Krümmungsmass ist eine solche Abbildung (auf einer Pseudosphäre) komplizierter, insbesonders, da wir es mit dem elliptischen Fall zu tun haben. Wir bleiben deshalb bei der Fig. 10 die uns einen klaren Einbick über die Verhältnisse gibt.

Betrachten wir dort das geod. Dreieck OS_0P_0 und beachten, dass P_0O senkrecht zu OS_0 ist und dass P_0S_0 und OS_0 sich in S_0, d. h. auf dem Grenzkreis, wo also $E=\infty$ ist, treffen, so müssen wir P_0S_0 un OS_0 als parallel annehmen und (18) § 10 gibt uns den sogenannten Parallelitätswinkel γ_0 an.

Auf Grund von (9) können wir statt (18) § 10 schreiben

$$\operatorname{cotg}\frac{\gamma_0}{2}=e^{\frac{E_0}{r}} \tag{14}$$

und ersehen hieraus, dass γ_0 sich umsomehr einem rechten Winkel nähert jekleiner E_0 sein wird.*

Beachten wir nun die Bemerkungen am Schluss der §§ 9 und 10 bezüglich der Winkelsumme der geod. Dreiecke und betrachten zu gleicher Zeit die Figuren 9 § 9 und 10 § 10 so haben wir eine Darstellung der Geometrien von Riemann und Lobatschefski, vor uns, welche wir, laut dem an entsprechender Stelle Gesagtem, leicht konstruieren können.

mit

$$X_i=\alpha\,(x^s)^2+\beta_i x^i+\gamma_i \tag{c}$$

wo α, β_i und γ_i Konstante bedeuten, so haben wir es mit einem Riemannschen Raum konstanter Krümmung K zu tun, welche sich bestimmt aus

$$K+\sum_1^n\beta_i^2=4\alpha\sum_1^n\gamma_i. \tag{d}$$

Die Brechungsexponenten (8) und (9) des Textes entsprechen der Form (a) und (b).

* Kommerell, l. c., Bd. II, p. 98.

§ 17. **Übergang zu einer anderen Koordinatenzahl, resp. zu einer anderen Dimension.** Wir werden sofort sehen, dass wir zwischen der Anzahl der Koordinaten und der Dimensionszahl scharf unterscheiden müssen.

Kürzehalber bedeute $\{x, y, z\}$, resp. $\{x, y\}$, dass die Anfangsbedingungen nur von drei, resp. nur von zwei u. s. w. Koordinaten abhängen.

Wir haben also bis jetzt folgenden Fall untersucht

I $$dS^2 = n^2(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Für das weitere betrachten wir einfachkeitshalber die Gl. (1) § 6 und deshalb

Ia $$\frac{\partial^2 u}{c^2 \partial t^2} = \frac{1}{n^3}\left(\frac{\partial n \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial n \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial y} + \frac{\partial n \frac{\partial u}{\partial z}}{\partial z}\right); \quad \{x, y, z\}; \quad n(x, y, z).$$

Nun nehmen wir an, dass n und die Anfangsbedingungen nur von x und y abhängen. Dasselbe muss augenscheinlich auch für u gelten und deshalb statt Ia,

Ib $$\frac{\partial^2 u}{c^2 \partial t^2} = \frac{1}{n^3}\left(\frac{\partial n \frac{\partial n}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial n \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial y}\right); \quad \{x, y\}; \quad n(x, y).$$

Es sind also die Anfangsbedingungen innerhalb eines unendlich langen Cylinders, parallel der Z-Achse gegeben. Da wir aber laut (1) einen dreidimensionalen Raum haben, so werden wir daselbst eine geod. Kugel legen müssen, woraus sich dann bekanntlich der Wellenrückstand erklärt.

Enlich mögen n und die Anfangsbedingungen nur von x abhängen. Dann ergibt sich

Ic $$\frac{\partial^2 u}{c^2 \partial t^2} = \frac{1}{n^3}\frac{\partial n \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x}; \quad \{x\}; \quad n(x).$$

Die Anfangsbedingungen sind jetzt also zwischen zwei unendlichen und zur X-Achse senkrechten Ebenen gegeben. Auch hier müssen wir wegen I eine geod. Kug. denken und demnach einen Wellenrückstand erwarten.

Wir gehen jetzt zu zwei Dimensionen über, Physikalisch entspricht dass einer unendlich dünnen Membran. Es ist demnach

II $$dS^2 = n^2(dx^2 + dy^2).$$

Dann ergibt sich laut (10) § 3 statt Ia,

IIa $$\frac{\partial^2 u}{c^2 \partial t^2} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right); \quad \{x, y\}; \quad n(x, y)$$

wobei wir hier nur einen geod. Kreis legen können.

Hängen n und die Anfangsbedingungen nur von x ab und demnach auch u, so folgt statt IIa,

IIb $$\frac{\partial^2 u}{c^2 \partial t^2} = \frac{1}{n^2}\frac{\partial^2 u}{gx^2}; \quad \{x\}; \quad n(x),$$

wobei also die Anfangsbedingungen längs eines unendlichen Streifens senkrecht zur X-Achse gegeben sind. Wegen II haben wir auch hier einen geod. Kreis und müssen demnach einen Wellenrückstand erwarten.

Haben wir endlich nur eine Dimension, was physikalisch einer unendlich dünnen Saite entspricht so ist

III $$dS^2 = n^2\, dx^2$$

und aus (10) § 3 folgt

IIIa $$\frac{\partial^2 u}{c^2 \partial t^2} = \frac{1}{n}\frac{\partial \frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x}; \quad \{x\}; \quad n(x).$$

Führen wir nun hier statt x die Variable

(1) $$v = \int_{x_0}^{x} n(x)\, dx$$

ein, so folgt statt IIIa die Gleichung

(2) $$\frac{\partial^2 u}{c^2 \partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}$$

deren Lösung wir in der d'Alembertschen Form erhalten können. Es wird kein Wellenrückstand vorhanden sein.

Wir ersehen deshalb dass z. B. die Fälle Ic, IIb, IIIa prinzipiell von einander verschieden sein werden, wegen der verschiedenen Dimensionszahl.

Wenn wir also von einem ebenen Fall bei drei dimensionen sprechen, so müssen wir uns dabei nicht IIa, sondern Ib vorstellen.

Beim n-Konst. verwischt sich dieser Unterschied, wie überhaupt wir in diesem Fall statt der obigen sechs Gleichungen nur drei erhalten.

Wenden wir uns jetzt zu unserer Arbeit,* so ersehen wir aus den Obigen, dass wir durch die dort ausgeführten Schnitte im Grunde genommen immer bei dem Fall I bleiben, d. h. nicht die Dimensionszahl, sondern die Koordinatenzahl verringern.

Wollen wir nun auch hier durch einen solchen Schnitt z. B. von *Ia* zu *Ib* übergehen, so werden die Formeln komplizierter, weil die Projektionen der Extremalen der geod. Kug. auf die XY-Ebene im allgemeinen keine Extremalen sind, wie dies bei n-Konst. der Fall sein wird.

Wir bemerken zum Schluss, dass falls wir nicht von drei Dimensionen, sondern z. B. von fünf ausgegangen wären, wir bei einer Koordinate nicht drei, sondern ebenfalls fünf Gleichungen erhalten hätten.

Leningrad, April, 1932.

В. С. ИГНАТОВСКИЙ. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В НЕОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Резюме

В этой работе показано, что можно вывести для неоднородной изотропной среды интегралы типа Пуассона для начальных условий. Это удается при некоторых ограничительных условиях, и кроме того мы кладем в основу необыкновенный тип волнового уравнения, а, например, тип (1) § 6, где правая часть оператор Бельтрами, второго рода, как известно инвариантный при преобразованиях.

Рассуждения с самого начала ведутся в общем виде для n-мерного пространства, что дает возможность делать некоторые общие замечания.

Разобранные примеры соответствуют пространствам постоянной (положительной или отрицательной) кривизны. При коэффициенте переломления $n = 1$, мы непрерывно переходим к пространству нулевой кривизны, т. е. к Евклидову пространству и таким образом к обыкновенному типу волнового уравнения.

* W. v. Ignatowsky. Zur Wellengleichung im N-dimensionalen Euklidischen Raum. Bull. Akad. Sci. URSS, classe MN, № 5, 1931, p. 611.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

К ЗАДАЧЕ КРУЧЕНИЯ И ИЗГИБА УПРУГИХ БРУСЬЕВ, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ
(*Представлено академиком* А. Н. Крыловым)

I. Введение

§ 1. Задача об упругом равновесии однородного бруса (т. е. цилиндрического тела, ограниченного с двух сторон плоскими основаниями, нормальными к боковой поверхности), под влиянием усилий, приложенных к основаниям, была, как известно, решена Saint-Venant'ом с полнотою, вполне достаточной для большинства приложений.

В настоящей статье мы рассматриваем брусья, составленные с помощью ряда призматических (цилиндрических) тел из различных однородных и изотропных материалов, спаянных друг с другом вдоль боковых поверхностей (пример: бетонная стойка, армированная продольными железными стержнями).

Мы показываем (отдел II), что задача кручения таких брусьев допускает решение типа Saint-Venant'a, т. е. такое, когда * $X_x = Y_y = X_y = 0$. Задача может быть сведена к одной краевой задаче теории потенциала, являющейся обобщением известной задачи Robin'a и Poincaré. Эта задача сводится в свою очередь к интегральному уравнению Fredholm'a (второго рода), весьма простому по структуре и допускающему полное исследование. **

Задача изгиба поперечной силой тоже допускает решение типа Saint-Venant'a, если коэффициенты Пуассона различных материалов одинаковы. В этом случае задача сводится к тому же интегральному уравнению, что и предыдущая, но только с другим свободным членом (отдел III).

* Обозначения будут пояснены ниже.

** Краткое изложение результатов, относящихся к кручению, напечатано в C. R. Acad. Sc., Paris, t. 194, p. 1435, 1932.

Наконец, задачи растяжения продольной силой и изгиба парой сил решаются совершенно элементарно при только что упомянутом предположении относительно коэффициентов Пуассона.

Задача изгиба и растяжения значительно усложняется, если коэффициенты Пуассона различны для различных составных частей бруса.

Мы указываем (отд. IV) способ решения задачи растяжения и задачи изгибания парой в этом последнем общем случае и разбираем несколько простых примеров.

§ **2.** В целях облегчения изложения мы начнем с того, что напомним общий характер решения упомянутых задач для случая однородного бруса и приведем относящиеся сюда формулы. Подробное изложение решения можно найти в любом большом курсе теории упругости.

Условимся прежде всего в обозначениях. Компоненты напряжения мы будем обозначать через X_x, Y_y, Z_z, $Y_z = Z_y$, $Z_x = X_z$, $X_y = Y_x$, а компоненты перемещения — через u, v, w.*

При отсутствии объемных сил эти компоненты удовлетворяют следующим известным уравнениям статики упругого тела:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} = \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Z^x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0, \tag{I, 1}$$

$$X_x = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_y = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \quad Z_z + \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$Y_z = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad Z_x = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad X_y = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{I, 2}$$

где

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

обозначает объемное расширение, λ и μ — постоянные Lamé. В частности μ есть модуль сдвига. Постоянные λ и μ связаны с модулем упругости (модулем Юнга) E и коэффициентом Пуассона σ соотношениями:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \tag{I, 3}$$

или:

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}.$$

* Эти обозначения приняты, напр. в известном курсе A. E. H. Love, Theory of Elasticity, 4 Edit., Cambridge, 1927.

Уравнения (I, 2) могут быть переписаны еще так:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{E}[X_x-\sigma(Y_y+Z_z)],\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{E}[Y_y-\sigma(Z_z+X_x)],$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{E}[Z_z-\sigma(X_x+Y_y)],$$

(I, 4)

$$\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{2(1+\sigma)}{E}Y_z,\quad \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{2(1+\sigma)}{E}Z_x,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2(1+\sigma)}{E}X_y.$$

Напряжение, действующее на площадку, положительную нормаль к которой обозначим через n, дается известными формулами:

$$X_n=X_x\cos nx+X_y\cos ny+X_z\cos nz,$$

(I, 5)

$$Y_n=Y_x\cos nx+Y_y\cos ny+Y_z\cos nz,$$

$$Z_n=Z_x\cos nx+Z_y\cos ny+Z_z\cos nz,$$

где X_n, Y_n, Z_n обозначают компоненты напряжения, действующего на площадку со стороны положительной нормали.

§ 3. Вернемся теперь к задаче об упругом равновесии однородного бруса, боковая поверхность которого свободна, а основания подвержены действию данных внешних напряжений. Предполагается, конечно, что совокупность этих последних удовлетворяет условиям равновесия абсолютно твердого тела, т. е., что главный вектор и главный момент совокупности внешних напряжений, действующих на оба основания, равны нулю.

Направим ось Oz параллельно образующим боковой поверхности, а за плоскость Oxy примем одно из оснований бруса, которое, краткости ради, будем называть «нижним»; «верхнее» основание будет расположено на высоте $z=+l$, где l обозначает длину бруса.

Если поставить задачу во всей полноте, то следует найти решение уравнений (I, 1) и (I, 2), удовлетворяющее следующим краевым условиям:

На боковой поверхности:

$$X_x\cos nx+X_y\cos ny=0,\quad Y_x\cos nx+Y_y\cos ny=0,$$

(I, 6)

$$Z_x\cos nx+Z_y\cos ny=0;$$

на основаниях:

X_z, Y_z, Z_z — заданные функции от x, y (при $z=0$ и $z=l$).

Поставленная в таком виде задача представляет значительные математические трудности, если искать не только теоретическое решение, а такое, которое поддавалось бы фактическому вычислению.

К счастию оказывается, что для практических целей, в большинстве случаев, нет надобности (и даже не имеет смысла) ставить задачу с такой полнотой.

Действительно, редко бывает известно фактическое распределение внешних напряжений на основаниях бруса; с большей или меньшей точностью бывает известен главный вектор и главный момент этих напряжений; иными словами, бывает известна совокупность силы и пары, статически эквивалентная совокупности усилий, приложенных к данному основанию.

С другой стороны, хорошо оправдывается в действительности следующий принцип, высказанный Saint-Venant'ом («принцип Saint-Venant'a»): если совокупность усилий, распределенных на небольшом участке поверхности упругого тела заменить другой совокупностью, статически эквивалентною первой,* то такая замена не произведет практически заметного изменения в упругом состоянии частей тела, не слишком близко находящихся от упомянутого участка поверхности.

На основании этого принципа, если мы имеем дело с брусом, длина которого весьма значительна по сравнению с размерами оснований, мы должны заботиться только о том, чтобы главный вектор и главный момент усилий, приложенных к основаниям, имели заданные значения; фактическое же распределение напряжений на основаниях практически не имеет влияния на части бруса, не находящиеся вблизи оснований.

Таким образом, появляется довольно широкий произвол в выборе решения. Этим произволом Saint-Venant пользуется для упрощения задачи следующим образом: он заранее частично задается формой решения, оставляя его, однако, достаточно общим для того, чтобы можно было получить на основаниях бруса совокупности напряжений, статически эквивалентные данным («полуобратный метод»).

При этом приходится заботиться только об одном из оснований. Действительно, задание главного вектора и главного момента усилий, действующих на одном из оснований, определяет эти элементы и для другого, так как совокупность усилий, приложенных к обоим основаниям, должна быть статически эквивалента нулю (т. е. удовлетворять условию равновесия абсолютно твердого тела). С другой же стороны, всякое решение уравнений (I, 1)

* Т. е. имеющую тот же главный вектор и главный момент.

всегда дает, как известно, такое распределение напряжений на поверхности тела, которое статически эквивалентно нулю.

Условия, которым Saint-Venant подчиняет искомое решение, могут быть, в конечном счете, сведены к следующим: если представить себе брус как состоящий из ряда продольных волокон, то эти волокна не оказывают друг на друга боковых давлений, а также скалывающих усилий в поперечном направлении.

Иначе говоря, при принятом выборе координат,

$$X_x = Y_y = X_y = 0. \tag{I, 7}$$

Оказывается, что при этом остается как раз столько общности, что возможно удовлетворить уравнениям статики упругого тела, а также указанным выше условиям на основаниях.

Будем, для определенности, рассматривать усилия, приложенные к верхнему основанию. Совокупность этих усилий статически эквивалентна силе, приложенной, напр., в O', где O' есть точка пересечения оси Oz с верхнимоснованием, и паре. Силу мы можем разложить на две составляющие: по направлению оси Oz и по направлению, к ней перпендикулярному. Точно так же, пару можем разбить на две; момент одной из них будет параллелен оси Oz («закручивающая пара»), а момент другой — расположен в плоскости основания («изгибающая пара»).

В соответствии с этим, задачу нашу можно разбить на следующие четыре

a) Кручение парами, действующими в плоскостях оснований.

b) Растяжение (или сжатие) продольными силами, приложенными к основаниям.

c) Изгибание парами, плоскости которых перпендикулярны к основаниям.

d) Изгибание поперечной силой, приложенной к одному из оснований и действующей в его плоскости (к другому основанию должна быть, следовательно, приложена сила, равная и противоположная предыдущей, а также пара сил так, чтобы вся эта система сил уравновешивалась).

Приведем теперь решение указанных задач, данное Saint-Venant'ом.

§ 4. **Кручение.*** Напряжения в этом случае даны формулами:

$$X_z = \mu\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right), \quad Y_z = \mu\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right), \tag{I, 8}$$

$$X_x = Y_y = X_y = Z_z = 0,$$

* См., напр., Lowe, l. c., ch. XIV.

а перемещения — формулами:

$$u = -\tau yz,\quad v = \tau zx,\quad w = \tau\varphi(x, y). \tag{I, 9}$$

Здесь τ обозначает постоянную, измеряющую степень закручивания (угол относительного поворота двух нормальных сечений, отстоящих друг от друга на единицу расстояния по высоте), а $\varphi = \varphi(x, y)$ — некоторую функцию переменных x, y, подлежащую определению. Непосредственная подстановка показывает, что соотношения (I, 2) удовлетворены и что уравнения (I, 1) сводятся к следующему одному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{I, 10}$$

Иными словами, функция φ должна быть гармонической в области, занятой телом. Так как φ зависит только от x, y, то достаточно, конечно, рассматривать только какое-либо нормальное поперечное сечение S нашего бруса.

Далее, условие отсутствия внешних напряжений на боковой поверхности, т. е. условия (I, 6) сводятся, очевидно, к одному:

$$X_z\cos nx + Y_z\cos ny = 0$$

или, в силу форм. (I, 8),

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = y\cos nx - x\cos ny \quad (\text{на } C), \tag{I, 11}$$

где n обозначает внешнюю нормаль к контуру C области S в точке (x, y).

Таким образом, задача кручения сводится к нахождению гармонической функции φ по заданной на контуре нормальной производной, т. е. к одной из основных задач теории потенциала.

Легко показать, что если φ удовлетворяет вышеприведенным условиям, то тогда главный вектор напряжений, действующих на верхнее основание (а также, конечно, и на любое поперечное сечение) равен нулю и что совокупность этих напряжений статически эквивалентна закручивающей паре, момент M которой дается формулой:*

$$M = \tau D,$$

где

$$D = \mu\int\int_S \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dy. \tag{I, 12}$$

* Все это будет доказано ниже для более общего случая составного бруса

При заданном M, постоянная τ определяется по формуле: $\tau = \frac{M}{D}$. Величина D называется жесткостью при кручении; она зависит, как мы видим, от модуля сдвига и от формы сечения бруса (так как функция φ определяется этой формой). Функцию φ мы будем называть «функцией кручения».

§ 5. **Растяжение (в продольном направлении).** Здесь решение совершенно элементарно. Именно, считая, что растягивающие внешние усилия, действующие на верхнее основание, статически эквивалентны одной силе («растягивающая сила»), приложенной к центру тяжести основания (а, следовательно, напряжения, приложенные к другому основанию, эквивалентны равной и прямо-противоположной силе), будем иметь следующее решение:

$$\text{(I, 13)} \qquad Z_z = \frac{F}{S} \text{ (остальные компоненты напряжения} = 0),$$

$$\text{(I, 14)} \qquad u = -\frac{\sigma F}{SE} x, \quad v = -\frac{\sigma F}{SE} y, \quad w = \frac{F}{SE} z,$$

где F обозначает алгебраическое значение растягивающей силы (при $F < 0$ будем иметь сжатие).

Указанное решение соответствует равномерному распределению нормальных напряжений на основаниях.

Если растягивающие силы приложены не в центрах тяжести оснований, то их все же можно перенести туда при условии присоединения изгибающих пар. Поэтому в этом случае на указанное решение надо наложить решение задачи об изгибании парами, приложенными на концах, которое мы сейчас и указываем.

§ 6. **Изгибание парами, приложенными на концах, плоскости которых перпендикулярны к основаниям («круговой изгиб»).** И в этом случае решение вполне элементарно. Именно, будем считать, что начало координат расположено в центре тяжести основания, а оси координат направлены по главным осям инерции основания (относительно центра тяжести его).

Предположим сперва, что плоскость пары параллельна плоскости Oxz, т. е. момент ее параллелен оси Oy. Тогда будем иметь:*

$$\text{(I, 15)} \qquad Z_z = -\frac{M}{I} x \text{ (остальные компоненты напряжения} = 0),$$

* См. напр. Love, l. c., § 87.

(I, 16) $$u = \frac{M}{2EI}(z^2 + \sigma x^2 - \sigma y^2), \quad v = \frac{M}{EI}\sigma xy, \quad w = -\frac{M}{EI}xz,$$

где M — алгебраическая величина момента изгибающей пары (измеренная по оси Oy), а I — момент инерции поперечного сечения относительно оси, проходящей через центр его тяжести и параллельной оси Oy.

Плоскость $x = 0$ является «нейтральной» плоскостью: волокна, расположенные в ней, не растянуты и не сжаты. Центральная линия ($x = y = 0$) принимает (приближенно) форму окружности, расположенной в плоскости Oxz, радиус которой определяется формулой:

(I, 17) $$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$$ («закон Бернулли-Эйлера»);

величина $E \cdot I$ есть «жесткость при изгибе»; плоскость Oxz есть «плоскость изгиба»; она параллельна в нашем случае плоскости пары.

Если момент изгибающей пары не направлен по одной из главных осей сечения, то эту пару всегда можно разложить на две, каждая из которых удовлетворяет этому условию, и решение задачи получим, налагая два решения только-что указанного вида. В этом общем случае плоскость изгиба не совпадает с плоскостью пары; однако и здесь она перпендикулярна к нейтральной плоскости, существующей и в этом случае.

§ 7. **Изгибание поперечной силой.** Предположим, что оси координат выбраны, как в предыдущем случае; пусть поперечная сила приложена к центру тяжести сечения и параллельна оси Ox. Если W обозначает величину этой силы ($W > 0$, если сила направлена как ось Ox), то решение задачи имеет вид: *

$$X_z = \mu\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right) - \frac{W}{2(1+\sigma)I}\left\{\frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right)y^2\right\},$$

(I, 18) $$Y_z = \mu\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right) - \frac{W}{2(1+\sigma)I}\left\{\frac{\partial\chi}{\partial y} + (2+\sigma)xy\right\},$$

$$Z_z = -\frac{W(l-z)}{I}x$$

(остальные компоненты напряжения равны нулю);

$$u = -\tau yz + \frac{W}{EI}\left[\frac{1}{2}(l-z)\sigma(x^2 - y^2) + \frac{1}{2}lz^2 - \frac{1}{6}z^3\right],$$

(I, 19) $$v = \tau zx + \frac{W}{EI}\sigma(l-z)xy,$$

$$w = \tau\varphi - \frac{W}{EI}\left[x\left(lz - \frac{1}{2}z^2\right) + \chi + xy^2\right].$$

* См. напр. Love, l. c., §§ 227—230.

где φ обозначает функцию, определяемую так же, как в случае кручения (т. е. φ есть функция кручения), τ — некоторая постоянная и, наконец, $\chi = \chi(x, y)$ — функция, гармоническая в области S, определяемая по краевому условию.

$$\text{I, 20)} \quad \frac{\partial \chi}{\partial n} = -\left[\frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right) y^2\right] \cos nx - (2 + \sigma)\, xy \cos ny$$

на границе C области S; как и выше, n обозначает внешнюю нормаль.

Легко непосредственно проверить, что уравнения статики упругого тела будут удовлетворены и боковая поверхность свободна от напряжений. Легко далее вычислить, что главный вектор внешних напряжений, приложенных к верхнему основанию, параллелен оси Ox и равен W по алгебраическому значению.* Однако, если оставить τ произвольным, усилия, приложенные к этому основанию, дадут еще закручивающую пару. Именно, члены, содержащие τ, дадут пару с моментом, τD, где D определяется формулой (I, 12), а члены, содержащие W — пару с моментом

$$\text{(I, 21)} \quad \frac{W}{2(1+\sigma) I} \int\int_S \left\{ y \frac{\partial \chi}{\partial x} - x \frac{\partial \chi}{\partial y} + \right.$$
$$\left. + \left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right) y^3 - \left(2 + \frac{1}{2}\sigma\right) x^2 y \right\} dx\, dy.$$

Чтобы избавиться от закручивающей пары достаточно придать τ такое значение, чтобы сумма указанных моментов равнялась нулю.

Члены, содержащие W определяют изгиб бруса. И здесь плоскость $x = 0$ является нейтральной плоскостью, плоскость Oxz — плоскостью изгиба. Центральная линия (т. е. линия $x = 0$, $y = 0$, проходящая через центры тяжести сечений) обращается в кривую, расположенную в плоскости Oxz, причем радиус кривизны ее (в данной точке, определяемой координатой z) подчиняется тому же закону Бернулли-Эйлера:

$$\text{(I, 22)} \quad \frac{1}{R} = \frac{M}{EI},$$

где

$$M = W(l - z);$$

* См. ниже доказательство для более общего случая составного бруса.

M, как видно из приведенного выражения, обозначает момент усилий, действующих на поперечное сечение, проходящее через данную точку относительно оси, находящейся в плоскости сечения и параллельной оси Oy.

Кроме того, члены, содержащие τ, сообщают брусу закручивание вокруг оси Oz.

Непосредственно ясно, что в случае сечения, симметричного относительно оси Ox, будем иметь $\tau = 0$ и закручивание отсутствует.

Наконец, если сила W не параллельна одной из главных осей инерции основания или не проходит через центр тяжести его, то точку приложения можно все же перенести в центр тяжести, присоединив подходящую закручивающую пару, а затем разложить силу на две составляющие, параллельные главным осям инерции. Тогда искомое решение получится наложением решения задачи кручения и двух задач изгиба силами, параллельными главным осям.

§ 8. Заметим, наконец, что во всех перечисленных выше случаях, к компонентам u, v, w можно прибавить соответственно члены вида

$$(\text{I}, 23)\quad u_0 = \alpha + qz - ry,\ v_0 = \beta + rx - pz,\ w_0 = \gamma + py - qx,$$

где α, β, γ, p, q, r — произвольные постоянные (того же порядка малости, который допускается для деформаций). Члены эти выражают перемещение бруса как абсолютно твердого тела и никакого влияния на деформацию и напряженное состояние не оказывают.

II. Кручение брусьев, составленных из различных материалов

§ 9. Перейдем теперь к изучению вопроса кручения брусьев, составленных из призматических (цилиндрических) тел, спаянных между собой вдоль боковых поверхностей; каждую составную часть мы будем предполагать однородной и изотропной.

Будем, для определенности, вести рассуждения для случая, когда рассматриваемый брус состоит из ряда параллельных сплошных стержней, не касающихся друг друга, окруженных упругой средой, заполняющей пространство между стержнями и ограниченной снаружи цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны стержням.

Поперечное нормальное сечение S такого бруса будет состоять из ряда разделенных областей S_1, $S_2, \ldots, S_m$, соответствующих стержням и области S_0, соответствующей окружающему материалу. Границу области S_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) мы обозначим через C_j; граница же области S_0 бу-

дет состоять из замкнутых контуров $C_1, C_2, \ldots, C_m, C_{m+1}$, из которых последний содержит внутри себя все предыдущие (см. фиг. 1).

Постараемся удовлетворить условиям задачи кручения, полагая, как для случая однородного бруса,

(II, 1) $$u = -\tau zy, \quad v = \tau zx, \quad w = \tau\varphi(x, y).$$

Тогда на основании формул (I, 2) получим, что в области

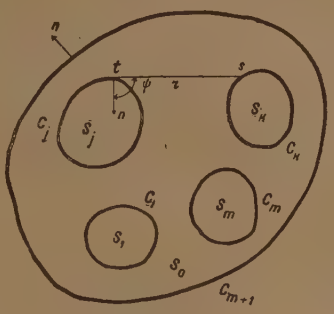
$$S_j (j = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

будем иметь (так же как и в случае однородного бруса)

(II, 2) $$X_z = \tau\mu_j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right), \quad Y_z = \tau\mu_j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right),$$

где μ_j обозначает модуль сдвига, соответствующий области S_j; остальные компоненты напряжения обращаются в 0.

Подставляя эти значения в уравнения (I, 1), убедимся, что эти уравнения сводятся так же, как в случае однородного бруса к уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$. Итак, и здесь функция φ должна быть гармонической в каждой из областей S_j.



Фиг. 1.

Разница со случаем однородного бруса проявляется только в краевых условиях. Эти условия мы получим, выражая, что:

1°. Боковая (внешняя) поверхность бруса свободна от внешних напряжений.

2°. Усилия, действующие на элементы поверхностей раздела различных материалов, равны по величине и противоположно направлены.

3°. Компоненты u, v, w перемещения остаются непрерывными при переходе через поверхности раздела (ибо, по предположению, различные части бруса спаяны между собою).

Условие 1° очевидно сводится к следующему

(II, 3) $$X_z \cos nx + Y_z \cos ny = 0 \quad (\text{на } C_{m+1}),$$

а условие 2° к равенствам:

(II, 4) $$(X_z \cos nx + Y_z \cos ny)_j = (X_z \cos nx + Y_z \cos ny)_0 \ (\text{на } C_1, C_2, \ldots, C_m);$$

здесь, а также и во всем дальнейшем, под n мы понимаем нормаль к одному

из контуров C_j, внешнюю по отношению к области S_0. Индексы же 0 и j указывают, что выражение, заключенное в скобках, вычисляется для материала, находящегося в области S_0 или, соответственно, в области S_j.

Подставляя на место X_z и Y_z их значения (II, 2), условия (II, 3) и (II, 4) можно объединить в одной формуле

$$\text{(II, 5)}\quad \mu_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_0-\mu_j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_j=(\mu_0-\mu_j)(y\cos nx-x\cos ny)\ (\text{на } C_j, j=1,\ldots,m+1)$$

если условиться считать $\mu_{m+1}=0$.

Условие же 3° сводится очевидно к требованию, чтобы функция φ оставалась непрерывной при переходе из одного материала в другой. Иными словами, функция φ должна быть непрерывной во всей области

$$S=S_0+S_1+\ldots+S_m.$$

Ниже (см. § 17) будет показано, что если функция φ удовлетворяет предыдущим условиям, тогда главный вектор усилий, приложенных к любому из оснований, равен нулю. Следовательно, усилия, приложенные к основаниям, сводятся к закручивающим парам. Момент M пары, действующей на верхнее основание, получим, вычисляя главный момент упомянутых усилий относительно оси Oz. Именно, будем иметь очевидно:

$$M=\tau D,$$

где

$$\text{(II, 6)}\qquad D=\sum_{j=0}^{m}\int\int_{S_j}\mu_j\left(x^2+y^2+x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dy.$$

D есть жесткость при кручении. Легко показать, что всегда $D>0$, но мы на этом не останавливаемся. При заданном M, постоянная τ вычисляется по предыдущей формуле.

§ 10. Итак, задача, в конечном счете, свелась к определению гармонической функции φ, непрерывной во всей области S, нормальные производные которой имеют на контурах C_j разрывы, подчиняющиеся условиям (II, 5); при этом, на внешнем контуре нормальная производная задана тем же условием (II, 5) при $j=m+1$.

Мы дадим решение несколько более общей задачи, заменив условия (II, 5) условиями

$$\text{(II, 7)}\qquad \mu_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_0-\mu_j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_j=f_j,$$

где f_j обозначает функцию, заданную на контуре C_j.

В случае задачи кручения имеем

(II, 8) $$f_j = (\mu_0 - \mu_j)(y\cos nx - x\cos ny).$$

Легко показать, что приведенные условия определяют искомую функцию φ с точностью до произвольной постоянной.

Действительно, имеем:

$$\sum_{j=1}^{m+1} \int_{C_j} \varphi f_j\, ds = \sum_{j=1}^{m+1} \int_{C_j} \varphi \left[\mu_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0 - \mu_j \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_j \right] ds =$$

$$= \mu_0 \int_C \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0 ds - \sum_{j=1}^{m} \mu_j \int_{C_j} \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_j ds,$$

где C обозначает совокупность контуров $C_1, C_2, \ldots, C_{m+1}$.

С другой стороны, хорошо известна формула

$$\int_C \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, ds = \int\int_S \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy,$$

где φ обозначает функцию, гармоническую в некоторой области S, ограниченной контуром C, а $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ — производную по направлению внешней нормали. Принимая во внимание, что для областей $S_1, \ldots, S_m$, при наших обозначениях, n является внутренней нормалью, получим окончательно

(II, 9) $$\sum_{j=1}^{m+1} \varphi f_j\, ds = \sum_{j=0}^{m} \mu_j \int\int_{S_j} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy.$$

Из последней формулы следует, что если на всех контурах C_j имеем

$$f_j = 0,$$

тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

во всей области S, а следовательно $\varphi = \text{const}$.

Если теперь φ_1 и φ_2 обозначают два решения нашей задачи, то $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ будет также решением, соответствующим случаю $f_j = 0$ на всех контурах. Отсюда выводим: $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$, а это и требовалось доказать.

Перейдем теперь к вопросу о существовании решения и нахождении его.

Прежде всего, из (II, 7) легко выводим

$$\sum_{j=1}^{m+1} \int_{C_j} f_j\, ds = \mu_0 \int_C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0 ds - \sum_{j=1}^{m} \mu_j \int_{C_j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_j ds,$$

откуда, принимая во внимание, что интеграл от нормальной производной гармонической в данной области функции, взятый по всей границе области, равен нулю, следует:

$$\text{(II, 10)} \qquad \sum_{j=1}^{m+1} \int_{C_j} f_j\, ds = 0.$$

Следовательно, условие (II, 10) является необходимым для существования решения. Оно оказывается также и достаточным, как мы увидим ниже.

§ 11. Принимая во внимание непрерывность искомой функции φ во всей области S и разрывность ее нормальных производных на контурах C_j, естественно пытаться представить эту функцию в виде потенциала простого слоя, распределенного на этих контурах, так как потенциал простого слоя обладает как раз этими свойствами. Мы придем, таким образом, к обобщению известной задачи Robin'a и Poincaré.*

Итак положим:

$$\text{(II, 11)} \qquad \varphi(x, y) = \int_C \rho(s) \log \frac{1}{r}\, ds = \sum_{j=1}^{m+1} \int_{C_j} \rho(s) \log \frac{1}{r}\, ds;$$

здесь r обозначает расстояние точки (x, y) до точки s, расположенной на одном из контуров C_j; $\rho(s)$ (плотность слоя) обозначает искомую неизвестную функцию точки s. Буквою s мы вместе с тем обозначаем дугу того из контуров C_j, по которому производится интегрирование.

На основании известных свойств потенциала простого слоя, функция φ, определяемая предыдущим равенством, будет непрерывной во всей области. Нормальная же производная будет разрывна при переходе через контуры C_j. А именно, имеют место известные соотношения:

* Мы применяем это название, следуя J. Plemelj, Potential theoretische Untersuchungen, Lpz., 1911, Teubner.

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_j = -\pi\rho(t) + \int_C \rho(s)\frac{\cos\psi}{r}\,ds \quad (j=1,\,2,\ldots,m),$$

(II, 12)

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_0 = \pi\rho(t) + \int_C \rho(s)\frac{\cos\psi}{r}\,ds;$$

здесь $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_0$ и $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_j$ относятся к точке t одного из контуров C_j, r обозначает расстояние между точками s и t и, наконец, ψ — угол между вектором $\overrightarrow{ts}$ и нормалью n в точке t (напомним, что n всегда обозначает нормаль, внешнюю по отношению к области S_0); см. фиг. 1.

Контурные условия (II, 7) обращаются, на основании равенств (II, 12), в уравнения

$$\pi(\mu_0+\mu_j)\rho(t) + (\mu_0-\mu_j)\int_C \rho(s)\frac{\cos\psi}{r}\,ds = f_j(t), \tag{II, 13}$$

где t обозначает точку на контуре C_j $(j=1,\ldots,m+1)$.

Мы получили, таким образом, систему уравнений Fredholm'a, которые можно свести к одному единственному

$$\rho(t) + \int_C K(t,s)\rho(s)\,ds = f(t), \tag{II, 14}$$

где положено

$$K(t,s) = \frac{\mu_0-\mu_j}{\pi(\mu_0+\mu_j)}\frac{\cos\psi}{r}, \quad f(t) = \frac{f_j(t)}{\pi(\mu_0+\mu_j)} \tag{II, 15}$$

(когда t находится на C_j).

Выясним, при каких условиях уравнение (II, 14) имеет решение. Однородное уравнение

$$\rho(t) + \int_C K(t,s)\rho(s)\,ds = 0, \tag{II, 16}$$

получаемое из (II, 14), если положить $f(t)=0$, т. е.

$$f_j(t) = 0\,(j=1,\ldots,m+1)$$

имеет одно единственное линейно независимое решение.

Действительно, функция φ, определяемая равенством (II, 11), где $\rho(s)$ есть решение однородного уравнения (II, 16), будет удовлетворять контурным условиям (II, 7) при $f_j=0$. Но, на основании доказанного § 10, такая

функция φ есть постоянная во всей области S. Но при $\varphi = \text{const}$, равенства (II, 12) дают:

$$2\pi\rho(t) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_0 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_j = 0 \quad (\text{на } C_j,\ j = 1, 2, \ldots, m).$$

Итак, решение ρ однородного уравнения (II, 16) есть плотность слоя, распределенного на внешней границе C_{m+1} области S, дающего постоянный потенциал в этой области; это, таким образом, есть двухмерный аналог «естественного распределения» электричества на проводнике. Как известно,* плотность такого распределения определена с точностью до постоянного множителя, а это и доказывает наше утверждение.

На основании известной теоремы Fredholm'a, сопряженное однородное уравнение, т. е. уравнение

$$\text{(II, 17)} \qquad \rho(s) + \int_C K(t, s)\,\rho(t)\,dt = 0$$

будет также допускать одно единственное (линейно независимое) решение. Легко найти это последнее. Именно, легко проверить, что этим решением будет:

(II, 18) $\rho^*(t) = \mu_0 + \mu_j$ (когда t находится на C_j, $j = 1, \ldots m+1$).

Действительно, если точка s взята на C_j $(j < m+1)$, то

$$\int_{C_j} K(t, s)\,dt = \frac{\mu_0 - \mu_j}{\pi(\mu_0 + \mu_j)} \int_{C_j} \frac{\cos\psi}{r}\,dt = \frac{\mu_0 - \mu_j}{\mu_0 + \mu_j},$$

$$\int_{C_i} K(t, s)\,dt = \frac{\mu_0 - \mu_i}{\pi(\mu_0 + \mu_i)} \int_{C_i} \frac{\cos\psi}{r}\,dt = 0 \quad (i \neq j,\ i \neq m+1),$$

$$\int_{C_{m+1}} K(t, s)\,dt = \frac{\mu_0}{\pi\mu_0} \int_{C_{m+1}} \frac{\cos\psi}{r}\,dt = -2.$$

Все это следует из хорошо известных формул:

$$\int_{C_j} \frac{\cos\psi}{r}\,dt = \begin{cases} 0 & \text{если } s \text{ — вне} \quad C_j \\ \pi & \text{» » — на} \quad \text{»} \\ 2\pi & \text{» » — внутри »} \end{cases}$$

* См. напр. T. Plemelj, l. c., стр. 63.

(для C_{m+1} знак меняется, так как в этом случае, по нашим обозначениям, n будет внешней нормалью по отношению к этому контуру, а не внутреннею, как по отношению к другим контурам C_j).

Принимая во внимание эти формулы, сразу устанавливаем, что величина ρ^*, определяемая (II, 18), удовлетворяет уравнению (II, 17), если точка s взята на $C_j (j < m+1)$. Наконец, если точка s взята на C_{m+1}, то будем иметь, подобно предыдущему

$$\int_{C_j} K(t, s)\, dt = 0 \quad (j < m+1), \qquad \int_{C_{m+1}} K(t, s)\, dt = -1,$$

откуда следует, что уравнение (II, 17) удовлетворится и в этом случае.

Итак, ρ^*, определяемое равенствами (II, 18), есть одно из решений уравнения (II, 17); остальные решения могут отличаться от него только постоянным множителем.

По известной теореме Fredholm'a исходное интегральное уравнение будет допускать решение тогда и только тогда, когда соблюдено условие:

$$\int_C \rho^* f ds = 0,$$

то есть

$$\sum_{j=1}^{m+1} \int_{C_j} f_j\, ds = 0. \tag{II, 19}$$

При соблюдении этого условия исходное интегральное уравнение (II, 14) имеет решение, определенное с точностью до слагаемого вида $K\rho^{**}$, где K произвольная постоянная, а ρ^{**} — решение однородного уравнения (II, 16). Потенциал, соответствующий этому слагаемому, — величина постоянная. Поэтому функция φ определится с точностью до произвольной постоянной.

В случае задачи кручения, когда функции f_j имеют вид, определяемый формулой (II, 8), условие существования решения, т. е. условие (II, 19) соблюдено всегда. Действительно ясно, что

$$(y \cos nx - x \cos ny)\, ds = \pm\, d\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

(причем верхний или нижний знак берутся в зависимости от направления обхода контура); следовательно, для каждого из контуров C_j будем иметь

$$\int_{C_j} f_j\, ds = 0;$$

тем более будет соблюдено и условие (II, 19).

Следовательно, поставленная нами задача кручения всегда имеет решение указанного вида; функция кручения φ определяется с точностью до произвольной постоянной, не имеющей никакого влияния на напряжения и деформацию.

Совершенно аналогичным образом решается задача о кручении бруса, состоящего из ряда полых цилиндров, вставленных один в другой и спаянных вдоль боковых поверхностей так, чтобы линии, отделяющие, в сечении S бруса, различные области, соответствующие различным материалам, представляли собою замкнутые контуры («составная труба»). Не представляет никакого принципиального усложнения и случай, когда различные составные части бруса снабжены продольными цилиндрическими полостями.

Во всем предыдущем предполагалось, конечно, что рассматриваемые замкнутые контуры C_1, C_2 и т. д. удовлетворяют определенным условиям регулярности. Для того, чтобы все предыдущее было справедливым, достаточно, напр. предположить, что каждый из рассматриваемых контуров имеет в каждой точке непрерывно изменяющуюся касательную и ограниченную кривизну.

§ 12. Раз характер решения известен, то в тех или иных частных случаях можно пытаться решить задачу, не прибегая к интегральным уравнениям, напр. при помощи разложения решения в ряд.

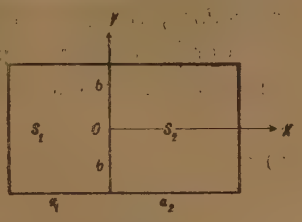
Таким образом легко, например, решить задачу для бруса, состоящего из кругового цилиндра с такою же полостью, заполненной другим материалом. В этом случае контуры C_j сводятся к двум окружностям.

Легко, между прочим, непосредственно убедиться, что если эти окружности концентрические, тогда $\varphi = \text{const}$;* таким образом, в этом простом частном случае каждая составная часть бруса закручивается по тому же закону, как если бы другой составной части не было. Такой же результат получим, очевидно, для случая сложной трубы, сечение которой представляет собою ряд концентрических круговых колец.

Можно часто также получить решение задачи кручения и в случаях, когда контуры имеют угловые точки, исключенных нами из рассмотрения при приведении задачи к интегральному уравнению. Один из таких случаев и рассматривается в нижеследующем примере.

* Действительно, взяв начало координат в общем центре окружностей, будем иметь $y\cos nx - x\cos ny = 0$. Следовательно $f_j = 0$ и $\varphi = \text{const}$. удовлетворяет всем условиям задачи.

§ 13. **Пример. Кручение прямоугольного бруса, составленного из двух также прямоугольных брусьев.** * Рассмотрим брус, состоящий из двух прямоугольных брусьев, сечения которых прямоугольники со сторонами a_1, $2b$ и a_2, $2b$, спаянных вдоль грани шириною $2b$ (см. фиг. 2).



Фиг. 2.

Модули сдвигов составляющих брусьев обозначим, соответственно, через μ_1 и μ_2. Направим ось Oy по линии раздела областей S_1 и S_2, соответствующих различным материалам и возьмем начало координат в середине этой линии; обозначим через φ' и φ'' значения функции кручения φ в областях S_1 и S_2.

Введем, далее, грамоническую функцию $\Phi = \varphi + xy$, значения которой в областях S_1 и S_2 обозначим через Φ' и Φ''. Как легко непосредственно убедиться, краевые условия сводятся к следующим:

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial \Phi'}{\partial x} = 2y \ (x = -a_1), \quad \frac{\partial \Phi''}{\partial x} = 2y \ (x = a_2),$$

$$\text{(b)} \qquad \mu_1 \frac{\partial \Phi'}{\partial x} - \mu_2 \frac{\partial \Phi''}{\partial x} = 2(\mu_1 - \mu_2) y \quad (x = 0, \ -b \leqslant y \leqslant b),$$

$$\text{(c)} \qquad \Phi' = \Phi'' \ (x = 0, \ -b \leqslant y \leqslant b),$$

$$\text{(d)} \qquad \frac{\partial \Phi'}{\partial y} = 0 \ (y = \pm b, \ -a_1 \leqslant x \leqslant 0);$$

$$\frac{\partial \Phi''}{\partial y} = 0 \ (y = \pm b, \ 0 \leqslant x \leqslant a_2).$$

Будем искать гармонические функции Φ' и Φ'' в виде рядов

$$\text{(e)} \qquad \Phi' = \sum_{n=0}^{\infty} (A'_{2n+1} \operatorname{Sh} mx + B_{2n+1} \operatorname{Ch} mx) \sin my,$$

$$\Phi'' = \sum_{n=0}^{\infty} (A''_{2n+1} \operatorname{Sh} mx + B_{2n+1} \operatorname{Ch} mx) \sin my,$$

где для краткости введено обозначение

$$\text{(f)} \qquad m = \frac{(2n+1)\pi}{2b}.$$

* Ср. решение задачи кручения для однородного бруса, принадлежащее Saint-Venant'y и приведенное у Love, l. c., § 221.

Каждый член обоих предыдущих рядов есть, очевидно, гармоническая функция. При этом числа m подобраны так, что удовлетворены условия (d); ясно также, что удовлетворено условие (c).

Остается удовлетворить условиям (a) и (b). Для этого заметим, что функцию $2y$ можно в промежутке $(-b, +b)$ представить в виде ряда: *

$$(g) \qquad 2y = \sum_{n=0}^{\infty} mA_{2n+1} \sin my,$$

где, для краткости, введено обозначение

$$(h) \qquad mA_{2n+1} = 4b\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2},$$

т. е.

$$A_{2n+1} = 4b^2\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

На основании (g) условия (a) будут удовлетворены, если

$$A'_{2n+1} \operatorname{Ch} ma_1 - B_{2n+1} \operatorname{Sh} ma_1 = A_{2n+1},$$

$$A''_{2n+1} \operatorname{Ch} ma_2 + B_{2n+1} \operatorname{Sh} ma_2 = A_{2n+1},$$

а условия (b), — если

$$\mu_1 A'_{2n+1} - \mu_2 A''_{2n+1} = (\mu_1 - \mu_2) A_{2n+1}.$$

Решая три предыдущие уравнения относительно A'_{2n+1}, A''_{2n+1}, B_{2n+1} и подставляя найденные значения в ряды (e), получим после некоторых очевидных преобразований: $\Phi' =$

$$4b^2\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{[\mu_2 + (\mu_1 - \mu_2)\operatorname{Ch} ma_2] \operatorname{Ch} m(x+a_1) + \mu_2 \operatorname{Sh} ma_2 \operatorname{Sh} mx - \mu_1 \operatorname{Ch} ma_2 \operatorname{Ch} mx}{\mu_1 \operatorname{Ch} ma_2 \operatorname{Sh} ma_1 + \mu_2 \operatorname{Ch} ma_1 \operatorname{Sh} ma_2} \sin$$

$\Phi'' =$

$$4b^2\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{[-\mu_1 + (\mu_1 - \mu_2)\operatorname{Ch} ma_1] \operatorname{Ch} m(x-a_2) + \mu_1 \operatorname{Sh} ma_1 \operatorname{Sh} mx + \mu_2 \operatorname{Ch} ma_1 \operatorname{Ch} mx}{\mu_1 \operatorname{Ch} ma_2 \operatorname{Sh} ma_1 + \mu_2 \operatorname{Ch} ma_1 \operatorname{Sh} ma_2} \sin$$

* Этот ряд представляет собою ряд Фурье для функции, определенной в промежутке $(-2b, +2b)$, следующим образом:

функция равна		$2y$	в промежутке	$(-b, +b)$
»	»	$4b - 2y$	»	$(b, 2b)$
»	»	$-4b + 2y$	»	$(-b, -2b)$

Форма коэффициентов показывает, что полученные ряды сходятся довольно быстро (притом равномерно и абсолютно). Также очевидна законность почленного дифференцирования, которым мы пользовались в процессе вывода.

Функция кручения дается формулами

$$\varphi' = \Phi' - xy \text{ (в } S_1), \quad \varphi'' = \Phi'' - xy \text{ (в } S_2).$$

Жесткость при кручении D вычисляется по формуле (II, 6) которая в нашем случае принимает вид:

$$D = \mu_1 \iint_{S_1} \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial \varphi'}{\partial y} - y\frac{\partial \varphi'}{\partial x} \right) dxdy +$$

$$+ \mu_2 \iint_{S_2} \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial \varphi''}{\partial y} - y\frac{\partial \varphi''}{\partial x} \right) dxdy.$$

Внося в эту формулу предыдущие выражения для φ' и φ'', получим путем совершенно элементарных выкладок* (ср. случай однородного бруса, Love, l. c. § 225):

$$D = \frac{8}{3}(\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2) b^3 +$$

$$+ \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 b^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_1^2 \operatorname{Ch} ma_2 + \mu_2^2 \operatorname{Ch} ma_1 - (\mu_1^2 + \mu_2^2) \operatorname{Ch} ma_1 \operatorname{Ch} ma_2}{(2n+1)^5 (\mu_1 \operatorname{Ch} ma_2 \operatorname{Sh} ma_1 + \mu_2 \operatorname{Ch} ma_1 \operatorname{Sh} ma_2)} -$$

$$- \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 b^4 \mu_1 \mu_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Ch} ma_1 + \operatorname{Ch} ma_2 - \operatorname{Ch} m(a_1 - a_2) - 1}{(2n+1)^5 (\mu_1 \operatorname{Ch} ma_2 \operatorname{Sh} ma_1 + \mu_2 \operatorname{Ch} ma_1 \operatorname{Sh} ma_2)}.$$

Если a_1 и a_2 велики по сравнению с b (практически, при $a_1 > 5b$, $a_2 > 5b$), то можем с достаточною точностью принять

$$\frac{\operatorname{Sh} ma_1}{\operatorname{Ch} ma_1} = 1, \quad \frac{\operatorname{Sh} ma_2}{\operatorname{Ch} ma_2} = 1, \quad \frac{1}{\operatorname{Sh} ma_1} = \frac{1}{\operatorname{Ch} ma_1} = \frac{1}{\operatorname{Sh} ma_2} = \frac{1}{\operatorname{Ch} ma_2} = 0$$

и тогда получим для D приближенную формулу (ср. аналогичное значение для случая однородного бруса у Love, l. c., § 225)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

* В частности мы пользуемся известным соотношением

$$D = \frac{8}{3}(\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2) b^3 - \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{\mu_1 + \mu_2} b^4 \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} =$$

$$= \frac{8}{3}(\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2) b^3 - 3{,}361\, b^4 \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

III. Растяжение (сжатие) и изгиб брусьев, составленных из различных материалов с одним и тем же коэффициентом Пуассона

§ 14. Перейдем теперь к рассмотрению остальных случаев упругого равновесия бруса, упомянутых в § 3. Будем теперь предполагать, что различные материалы, составляющие брус, имеют один и тот же коэффициент Пуассона σ, но, вообще говоря, различные модули упругости.

Если вспомнить, что для очень многих материалов значения σ мало разнятся друг от друга, становится ясным, что это ограничение не так уж значительно.* С другой стороны, оно весьма упрощает решение.

В частности, для случаев растяжения (сжатия) и изгиба парой, почти никакого усложнения по сравнению с однородным брусом не получается, как сейчас будет показано.

Введем в рассмотрение величину:

$$S_B = \int\int_B E dx dy = \sum_i S_i E_i, \tag{III, 1}$$

где E обозначает модуль упругости, соответствующий данной точке сечения, принимающий постоянные значения E_i в отдельных участках S_i сечения, соответствующих различным материалам; площади этих участков обозначены теми же буквами S_i.

Далее, под «приведенным центром тяжести» сечения будем понимать центр тяжести, который получится, если отдельным участкам сечения приписать поверхностные плотности, равные соответствующим модулям упругости; таким образом, если начало координат взято в приведенном центре тяжести сечения, то

* По старой теории Пуассона величина σ должна быть одинакова для всех (однородных изотропных) материалов и равна $\frac{1}{4}$. Однако, это не подтвердилось в действительности. Все же колебания σ для различных материалов значительно меньше, чем колебания E. Напр. для меди $\frac{1}{\sigma} = 2.87$, $E = 1\,250\,000\ \frac{kg}{cm^2}$, а для аллюминия $\frac{1}{\sigma} = 2.92$, $E = 7\,40\,000$ (значения взяты из известного Handbuch der Physik, Bd. VI, Berlin, Springer, 1928).

(III, 2) $$\int\int_S Exdxdy = \int\int_S Eydxdy = 0.$$

Под «приведенным моментом инерции» сечения будем подразумевать момент инерции, вычисленный при том же предположении относительно плотностей отдельных участков сечения. В частности, приведенный момент инерции относительно оси Oy, находящейся в плоскости сечения, который будем обозначать через I_E, будет дан формулой:

(III, 3) $$I_E = \int\int_S Ex^2\,dxdy = \sum_j E_j I_j,$$

где I_j — обычный момент инерции площади S_j относительно той же оси.

Наконец, главные оси инерции сечения, соответствующие указанному предположению относительно плотностей, будем называть «приведенными главными осями».

Если оси Ox, Oy совпадают с приведенными главными осями инерции, то будем иметь:

(III, 4) $$\int\int_S Exy\,dxdy = \sum_j E_j \int\int_{S_j} xy\,dxdy = 0.$$

§ 15. Растяжение. Легко видеть, что при указанных обозначениях задача о растяжении бруса продольными силами, приложенными к приведенным центрам тяжестей сечений, решается следующими формулами [ср. § 5, формулы (I, 13) и (I, 14)]:

(III, 5) $$Z_j = \frac{E_j F}{S_E} \text{ (в области } S_j),$$

$$u = -\frac{\sigma F}{S_E} x, \quad v = -\frac{\sigma F}{S_E} y, \quad w = \frac{F}{S_E} z$$

(остальные компоненты напряжения равны 0); здесь F обозначает (алгебраическую) величину растягивающей силы (при $F < 0$ имеем сжатие).

§ 16. Задача об изгибании парой, момент которой расположен в плоскости основания, также мало чем отличается от задачи для однородного бруса (§ 6). Возьмем начало координат в приведенном центре тяжести нижнего основания, а за оси Ox, Oy примем главные оси инерции.

Если момент пары, действующей на верхнее основание, параллелен оси Oy, и его алгебраическая величина есть M, то решение дается формулами:

(III, 6) $$Z_z = -\frac{ME_j}{I_E}x \quad \text{(в области } S_j\text{)}$$

(остальные компоненты напряжения равны нулю) и

(III, 7) $$u = \frac{M}{2I_E}(z^2 + \sigma x^2 - \sigma y^2), \quad v = \frac{M}{I_E}\sigma xy, \quad w = -\frac{M}{I_E}xz.$$

Непосредственная подстановка в уравнения статики упругого тела показывает, что все они удовлетворяются этими значениями; также, очевидно, удовлетворяются краевые условия.

Главный вектор внешних напряжений, приложенных, скажем, к верхнему основанию, равен нулю, так как

$$\int\int_S Z_z\,dxdy = 0$$

в силу (III, 2).

Момент этих напряжений относительно оси Oy равен, в силу (III, 3):

$$-\int\int_S xZ_z\,dxdy = \frac{M}{I_E}\int\int_S Ex^2\,dxdy = M;$$

наконец, момент относительно оси Ox равен

$$\int\int_S yZ_z\,dxdy = \frac{M}{I_E}\int\int_S Exy\,dxdy = 0,$$

в силу (III, 4).

Таким образом, наше решение действительно удовлетворяет всем поставленным условиям.

Легко видеть, что закон Бернулли-Эйлера остается в силе; жесткость при изгибе равна I_E.

§ 17. **Изгиб поперечной силой.** Перейдем теперь к решению задачи об изгибе поперечной силой. Возьмем начало координат в приведенном центре тяжести нижнего основания и направим оси координат по приведенным главным осям.

Мы всегда можем свести задачу к случаю, когда поперечная сила, приложенная к верхнему основанию, приложена к приведенному центру тяжести его и параллельна оси Ox (см. конец § 7).

Руководствуясь видом формул (I, 18), (I, 19), относящихся к однородному брусу, попытаемся удовлетворить условиям задачи выражениями следующего вида (предполагаем, как всегда, что $X_x = Y_y = X_y = 0$):

$$\text{(III, 8)} \qquad \begin{cases} u = -\tau yz + A\left[\frac{1}{2}(l-z)\sigma(x^2-y^2) + \frac{1}{2}lz^2 - \frac{1}{6}z^3\right], \\ v = \tau xz + A\sigma(l-z)xy, \\ w = \tau\varphi - A\left[x\left(lz - \frac{1}{2}z^2\right) + \chi + xy^2\right], \end{cases}$$

$$\text{(III, 9)} \qquad \begin{cases} X_z = \mu_j\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right) - B_j\left\{\frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right)y^2\right\}, \\ Y_z = \mu_j\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right) - B_j\left\{\frac{\partial\chi}{\partial y} + (2+\sigma)xy\right\}, \\ Z_z = -K_j(l-z)x, \end{cases}$$

где φ обозначает функцию кручения, рассмотренную в предыдущем отделе, $\chi = \chi(x, y)$ — некоторую функцию, подлежащую определению, l — длину бруса, τ, A — постоянные, B_j, K_j — также постоянные, которые могут, однако, принимать различные значения в участках, соответствующих различным материалам.

Непосредственная подстановка предыдущих выражений в уравнениях (I, 1) и (I, 2) статики упругого тела показывает, что должно быть:

$$\text{(III, 10)} \qquad B_j = \frac{AE_j}{2(1+\sigma)} = A\mu_j, \quad K_j = AE_j,$$

и что функция χ должна, как и функция φ, удовлетворять уравнению Лапласа в каждом из участков S_j; обратно, при этих условиях упомянутые уравнения будут удовлетворены.

Перейдем теперь к краевым условиям. Для того, чтобы перемещения u, v, w были непрерывны во всем теле, функция χ должна быть, очевидно, непрерывна во всем сечении S (так как функция кручения φ, по определению, также непрерывна во всей области S).

Условия же относительно напряжений, так же, как и в случае кручения, сводятся к требованию, чтобы выражение

$$\text{(III, 11)} \qquad X_z\cos nx + Y_z\cos ny$$

обращалось в нуль на свободной боковой поверхности и было непрерывно при переходе через поверхности раздела различных материалов.

Подсчитаем теперь главный вектор и главный момент напряжений, действующих на верхнее основание. Ясно прежде всего, что компонент главного вектора по оси Oz равен нулю. Компонент его по оси Ox равен

$$X = \int\int_S X_z \, dxdy.$$

Заметим теперь, что из выражений (III, 9) следует тождество:

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + 2B_j(1+\sigma)x = 0$$

или

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + AE_j x = 0.$$

На основании этого тождества, можем написать:*

$$X = \sum_j \int\int_{S_j} \left\{ X_z + x\left(\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y}\right) + AE_j x^2 \right\} dxdy =$$

$$= \sum_j \int\int_{S_j} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(xX_z) + \frac{\partial}{\partial y}(xY_z) \right\} dxdy + AI_B.$$

Преобразовывая последний интеграл по формуле Green'a, получим, наконец

$$X = \sum_j \int_{C_j} x(X_z \cos \nu x + Y_z \cos \nu y)\, ds + AI_B,$$

где C_j обозначают границы участков S_j, а ν — нормаль, внешнюю по отношению к области S_j. Интегрирование по линиям раздела двух участков производится два раза, так как эти линии принадлежат границам двух областей. Выражение $X_z \cos \nu x + Y_z \cos \nu y$ принимает при этих двух интегрированиях прямо-противоположные знаки,** не изменяя абсолютного значения; поэтому интегралы по линиям раздела взаимно уничтожаются. Также равны нулю интегралы по линиям, соответствующим свободным боковым поверхностям, так как на них

$$X_z \cos \nu x + Y_z \cos \nu y = 0.$$

* Ср. доказательство для случая однородного бруса, приведенное у Love, l. c., § 229.

** В выражении (III, 11) предполагается, что положительная нормаль n берется одна и та же для точек, примыкающих к линиям раздела с той и другой стороны. Здесь же нормаль ν имеет в таких точках прямо-противоположные направления.

Итак, окончательно получим: $X = AI_x$. Но, по условию, должно быть: $X = W$, где W — заданная сила. Это условие определяет постоянную A:

$$A = \frac{W}{I_x}. \tag{III, 12}$$

Для компонента главного вектора по оси Oy получим совершенно аналогичным путем:

$$Y = \int\int_S Y_z\,dxdy = \sum_j \int_{C_j} y\,(X_z \cos \nu x + Y_z \cos \nu y)\,ds + \\ + A \sum_j E_j \int\int_{S_j} xy\,dxdy.$$

Отсюда следует, на основании сказанного выше и на основании формулы (III, 4), что $Y = 0$.*

Так как, наконец, при $z = l$ имеем $Z_z = 0$, то на верхнем основании не будет изгибающей пары.

Момент же закручивающей пары будет дан формулой:

$$M = \tau D + \frac{W}{2(1+\sigma) I_x} \sum_j E_j \int\int_{S_j} \left\{ y \frac{\partial \chi}{\partial x} - x \frac{\partial \chi}{\partial y} + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right) y^3 - \left(2 + \frac{1}{2}\sigma\right) x^2 y \right\} dxdy, \tag{III, 13}$$

где D есть жесткость при кручении, определяемая формулой (II, 6).

Постоянная τ должна быть определена из условия $M = 0$, что всегда можно сделать, когда вычислены функции φ и χ.

Вычислять φ мы умеем на основании сказанного в предыдущем отделе. Остается вычислить функцию χ.

Принимая, для определенности, что сечение S бруса имеет такой же вид, как в предыдущем отделе, легко убеждаемся, на основании формул (III, 9) и (III, 10), что краевые условия сводятся к следующим при обозначении предыдущего отдела:

$$\mu_0 \left(\frac{\partial \chi}{\partial n}\right)_0 - \mu_j \left(\frac{\partial \chi}{\partial n}\right)_j = (\mu_0 - \mu_j) f_j \text{ (на } C_j,\ j = 1, 2, \ldots, m+1), \tag{III, 14}$$

* В частности, если $A = 0$, получим $X = Y = 0$; таким образом, мы получили доказательство, что формулы (III, 8), (III, 9) при $A = B_j = K_j = 0$ дают на верхнем основании только закручивающую пару.

где

$$(\text{III}, 15)\quad f_j = -(\mu_0 - \mu_j)\left\{\left[\frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right)y^2\right]\cos nx + (2+\sigma)\,xy\cos ny\right\}.$$

Таким образом, мы имеем точно такую же задачу, что и в случае кручения, только функции f_j, заданные на контурах, имеют здесь не то же значение, что в упомянутом случае.

Посмотрим теперь, удовлетворено ли условие существования решения (II, 19). Имеем

$$\sum_{j=1}^{m+1}\int_{C_j} f_j\,ds =$$

$$-\mu_0\int_C\left\{\left[\frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1-\frac{1}{2}\sigma\right)y^2\right]\cos nx + (2+\sigma)\,xy\cos ny\right\}ds +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\cdot\int_{C_j}\left\{\left[\frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1-\frac{1}{2}\sigma\right)y^2\right]\cos nx + (2+\sigma)\,xy\cos ny\right\}ds,$$

или, преобразовывая интегралы по формуле Green'a,

$$\sum_{j=1}^{m+1}\int_{C_j} f_j\,ds = -\int\int_{S_0} 2(1+\sigma)\mu_0\,x\,dxdy -$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\int\int_{S_j} 2(1+\sigma)\mu_j\,x\,dxdy = -\int\int_S E x dxdy;$$

но последний интеграл равен нулю, так как, по предположению, начало координат находится в приведенном центре тяжести.

Итак, условие (II, 19) выполнено, и наша задача всегда допускает определенное решение, получаемое помощью того же интегрального уравнения, что и в предыдущем отделе, но только при значениях f_j, определяемых формулой (III, 15) этого §.

В частности, остается в силе замечание, сделанное в предыдущем отделе, относительно применимости решения для иных видов сечения, напр., для случая составной трубы.

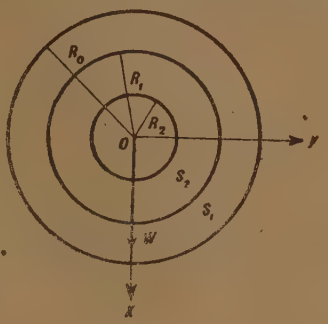
Заметим, наконец, что из формулы, определяющей u, т. е. из первой формулы (III, 8), следует, что кривизна центральной линии (линии, соеди-

няющей приведенные центры тяжести сечений) удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{R} = \frac{W}{I_E}(l - z);$$

иными словами, закон Бернулли-Эйлера имеет место. Только в нашем случае произведение $I \cdot E$ заменяется приведенным моментом инерции I_E; ср. формулу (I, 22).

§ 18. **Пример. Изгиб составной круглой трубы поперечной силой, приложенной к одному из концов.** Пусть сечение бруса состоит из двух концентрических круговых колец S_1, S_2, из которых первое охватывает второе, как указано на фиг. 3.



Фиг. 3.

Обозначим через R_2, R_1, R_0 соответственно радиусы внутренней, средней и наружной окружностей, а через E_1, E_2 — модули упругости, соответствующие участкам S_1 и S_2.

Пусть поперечная сила проходит через центр окружностей и параллельна оси Ox. В виду полной симметрии ясно, что $\tau = 0$, т. е. закручивания не будет. Найдем теперь функцию $\chi(x, y)$. Значение ее в зонах S_1 и S_2 обозначим, соответственно, через χ_1 и χ_2.

Пусть r, ϑ обозначают полярные координаты на плоскости Oxy.

Легко видеть, что

$$\left[\frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right)y^2\right]\cos\vartheta + (2 + \sigma)xy\sin\vartheta =$$

$$= -\frac{3}{4}r^2\cos 3\vartheta + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sigma\right)r^2\cos\vartheta. \tag{a}$$

В соответствии с этим краевые условия примут вид:

$$\frac{\partial\chi_1}{\partial r} = -kR_0^2\cos\vartheta + \frac{3}{4}R_0^2\cos 3\vartheta \quad (\text{при } r = R_0)$$

$$\chi_1 = \chi_2, \quad E_1\frac{\partial\chi_1}{\partial r} - E_2\frac{\partial\chi_2}{\partial r} =$$

$$= (E_1 - E_2)\left(-kR_1^2 + \frac{3}{4}R_1^2\cos 3\vartheta\right) \quad (\text{при } r = R_1) \tag{b}$$

$$\frac{\partial\chi_2}{\partial r} = -kR_2^2 + \frac{3}{4}R_2^2\cos 3\vartheta \quad (\text{при } r = R_2);$$

здесь для краткости положено:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sigma=k$$

и в среднее уравнение вместо модулей сдвига μ_1, μ_2 введены пропорциональные им модули упругости E_1, E_2.

Разлагая гармонические функции χ_1 и χ_2 по известным формулам в ряды и подставляя в предыдущие соотношения, легко найдем эти функции. Однако, легко догадаться, что предыдущим условиям можно удовлетворить, полагая (ср. известное решение для однородного полого кругового цилиндра):

$$\chi_1=\left(a_1 r+\frac{a_1'}{r}\right)\cos\vartheta+\frac{1}{4}r^3\cos 3\vartheta \quad (R_1\leqslant r\leqslant R_0),$$

$$\chi_2=\left(a_2 r+\frac{a_2'}{r}\right)\cos\vartheta+\frac{1}{4}r^3\cos 3\vartheta \quad (R_2\leqslant r\leqslant R_1).$$

Подставляя эти выражения в соотношения (b) сразу получим, что все условия будут удовлетворены, если

$$a_1R_0^2-a_1'=-kR_0^4,\quad a_2R_2^2-a_2'=-kR_2^4,$$

$$a_2R_1^2+a_2'=a_1R_1^2+a_1',$$

$$E_1(a_1R_1^2-a_1')-E_2(a_2R_1^2-a_2')=-k(E_1-E_2)R_1^4.$$

Решение этих уравнений дает для a_1 и a_2 выражения

$$a_1=-k\frac{E_1(R_0^4-R_1^4)(R_1^2+R_2^2)+E_2(R_1^2-R_2^2)[(R_1^2+R_2^2)+R_0^4-R_2^4]}{E_1(R_1^2+R_2^2)(R_0^2-R_1^2)+E_2(R_0^2+R_1^2)(R_1^2-R_2^2)},$$

$$a_2=-k\frac{E_1(R_0^2-R_1^2)[(R_0^2+R_1^2)^2-R_0^4+R_2^4]+E_2(R_1^4-R_2^4)(R_0^2+R_1^2)}{E_1(R_1^2+R_2^2)(R_0^2-R_1^2)+E_2(R_0^2+R_1^2)(R_1^2-R_2^2)};$$

затем a_1' и a_2' определятся по формулам:

$$a_1'=a_1R_0^2+kR_0^4\quad a_2'=a_2R_2^2+kR_2^4.$$

Таким образом задача решена. Так же легко решить задачу изгибания прямоугольного бруса, рассмотренного в примере предыдущего §-а.

IV. Растяжение и изгиб парою сил в случае различных коэффициентов Пуассона

§ 19. В общем случае, когда коэффициенты Пуассона различных материалов так же могут быть различными, задачи растяжения и изгиба значительно усложняются. Именно, оказывается, что здесь уже нельзя, как в случае Saint-Venant'a, принять $X_x=Y_y=X_y=0$.

Однако, как мы сейчас увидим, решение задач растяжения продольными силами и изгиба парами, приложенными на концах, может быть сведено к решению плоских задач определенного вида.

§ **20.** Растяжение. Рассмотрим сперва задачу растяжения продольными силами.

Начнем с того, что руководствуясь аналогией со случаем предыдущего отдела, попытаемся удовлетворить условиям задачи, полагая [ср. формулы (III, 5)]:

(IV, 1) $Z_z = aE_j,\ u = -\sigma_j ax,\ v = -\sigma_j ay,\ w = az$ (в области S_j)

(остальные компоненты напряжения равны 0), где σ_j и E_j обозначают, соответственно, коэффициент Пуассона и модуль упругости, соответствующие области S_j, а a — некоторую постоянную. Уравнения статики упругого тела будут, очевидно, удовлетворены; также будут удовлетворены условие на свободной боковой поверхности и условия, которым должны удовлетворять напряжения на поверхностях раздела. Однако, условие непрерывности перемещений будет удовлетворено только для компонента w; компоненты же u и v окажутся разрывными. Именно, на линиях раздела областей S_j и S_k будем иметь:

(IV, 2) $u_j - u_k = -(\sigma_j - \sigma_k)ax,\ v_j - v_k = -(\sigma_j - \sigma_k)ay,$

где u_j и u_k обозначают значения u, v с двух сторон линии раздела.

Эту разрывность можно устранить наложением подходящего решения плоской задачи, т. е. такого решения, при котором брус подвержен плоской деформации, параллельной плоскости Oxy (и не зависящей от координаты z).

Для такого решения будем иметь:*

$$w = 0,\ Y_z = X_z = 0,$$

$$X_x = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\ Y_y = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y},$$

(IV, 3)

$$X_y = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

(IV, 4) $$Z_z = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(X_x + Y_y) = \sigma(X_x + Y_y).$$

* Разумеется упругие постоянные имеют, вообще говоря, различное значение в различных участках сечения.

Компоненты X_x, Y_y, X_y должны удовлетворять уравнениям:

$$\text{(IV, 5)} \qquad \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0.$$

Решение уравнений (IV, 3) и (IV, 5) при тех или иных краевых условиях и составляет «плоскую задачу». Формула (IV, 4) определяет, по решении задачи, компонент Z_z.

В интересующем нас случае мы должны найти такое решение уравнений плоской задачи, т. е. (IV, 3), (IV, 5), при котором были бы выполнены условия:

$$\text{(IV, 6)} \qquad u_j - u_k = +(\sigma_j - \sigma_k)ax, \quad v_j - v_k = +(\sigma_j - \sigma_k)ay$$

(на линиях раздела) и кроме того

$$\text{(IV, 7)} \quad X_n = X_x \cos nx + X_y \cos ny = 0, \quad Y_n = Y_x \cos nx + Y_y \cos ny = 0$$

(на свободной поверхности),

$$\text{(IV, 8)} \qquad (X_x \cos nx + X_y \cos ny)_j = (X_x \cos nx + Y_y \cos ny)_k$$

(на линиях раздела), где значки j и k указывают на то, что берутся значения, соответствующие областям S_j, S_k, примыкающим к линии раздела; n, как всегда, обозначает нормаль к соответствующей линии, направленную определенным образом.

Если удастся решить указанную краевую задачу,* то наложение полученного решения на решение (IV, 1) даст очевидно решение требуемого

* Легко показать, что если решение существует, оно будет единственным (с точностью до перемещения тела как целого). То, что решение всегда существует, можно считать физически очевидным. Действительно, наша плоская задача соответствует следующей физической задаче, которую, краткости ради, мы сформулируем для случая, когда имеем только две составные части S_1 и S_2, разделенные линией C. Возьмем два бруса, состоящие из тех же материалов, что и данные, но имеющие сечения S_1', S_2' отличные от S_1, S_2. Именно, будем считать, что сечение S_1' получается из S_1 путем сообщения точками линии C перемещений u_1, v_1, а сечение S_2' — из сечения S_2, путем сообщения точками той же линии перемещений u_2, v_2; при этом будем считать, что

$$u_1 - u_2 = (\sigma_1 - \sigma_2)ax, \quad v_1 - v_2 = (\sigma_1 - \sigma_2)ay.$$

Если теперь вынудить соответствующие боковые поверхности наших брусьев с сечениями S_1' и S_2' притти в соприкосновение так, чтобы соприкоснулись соответствующие точки и спаять вдоль этих поверхностей, поддерживая деформацию плоской, тогда в полученном составном брусе возникнут напряжения и деформации, как раз соответствующие нашей плоской задаче. Задачу, конечно, можно обобщить, задавая $u_1 - u_2$ и $v_1 - v_2$ произвольным образом.

типа, содержащее произвольную постоянную a, которую надо будет подобрать таким образом, чтобы напряжения, приложенные, скажем, к верхнему основанию, были статически эквивалентны растягивающей силе заданной величины; * если точка приложения силы окажется не там, где нам желательно (напр. не в приведенном центре тяжести сечения), то полученное решение надо будет скомбинировать с решением задачи об изгибе парой, к которой сейчас перейдем.

§ 21. **Задача об изгибе парой** решается аналогичным образом. Именно, считая координатные оси выбранными, как в § 16, мы начинаем с попытки удовлетворить условиям задачи решением вида [ср. формулы (III, 6), (III, 7)].

$$Z_z = -aE_j x \quad (\text{в } S_j) \tag{IV, 9}$$

(остальные компоненты равны нулю),

$$u = \frac{1}{2}a(z^2 + \sigma_j x^2 - \sigma_j y^2),\ v = a\sigma_j xy,\ w = -axz, \tag{IV, 10}$$

где a некоторая постоянная.

Все условия оказываются при этом удовлетворенными, за исключением условия непрерывности компонентов перемещения u, v, которые имеют, по линиям раздела участков S_j, S_k разрывы вида:

$$u_j - u_k = \frac{a}{2}(\sigma_j - \sigma_k)(x^2 - y^2),\ v_j - v_k = a(\sigma_j - \sigma_k)xy.$$

Значит, для полного решения задачи достаточно наложить на предыдущее решение еще решение плоской задачи, совершенно такой, как в случае растяжения (§ 20), с той только разницей, что условия (IV, 6) заменяются следующими:

$$u_j - u_k = -\frac{a}{2}(\sigma_j - \sigma_k)(x^2 - y^2),\ v_j - v_k = -a(\sigma_j - \sigma_k)xy. \tag{IV, 11}$$

Наложение этого решения** на решение (IV, 9), (IV, 10) будет удовлетворять всем условиям на боковых поверхностях.

Постоянную a надо будет затем подобрать так, чтобы придать изгибающей паре момент заданной величины. Если этот момент не будет иметь

* Не надо упускать из виду, что к напряжению Z_z, определяемому формулой (IV, 1), присоединится еще напряжение, определяемое формулой (IV, 4). Легко видеть, что это последнее, так же как и первое, будет содержать постоянную a в качестве множителя: это следует из вида условия (IV, 6).

** Относительно единственности и существования решения можно повторить все сказанное относительно аналогичной задачи предыдущего § (см. примечание на предыдущей странице).

требуемого направления, то надо будет скомбинировать указанное решение с другим, поменяв ролями оси Ox и Oy; наконец, если на основаниях, кроме изгибающих пар, возникнут растягивающие (или сжимающие) силы, тогда надо будет полученное решение скомбинировать с решением задачи растяжения.

§ **22.** При решении встретившихся нам плоских задач удобно, как и во многих других случаях, пользоваться представлением общего решения плоской задачи при помощи функций комплексного переменного, впервые указанным Г. В. Колосовым в ряде работ.

Именно, самое общее решение уравнений плоской задачи может быть выражено через две функции $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ комплексного переменного $\zeta = x + iy$ следующим образом *:

$$u + iv = \alpha\varphi(\zeta) - \beta\zeta\overline{\varphi'}(\bar{\zeta}) - \beta\overline{\psi}(\bar{\zeta}), \tag{IV, 12}$$

$$X_x + Y_y = 4\Re\varphi'(\zeta), \quad Y_y - X_x + 2iX_y = 2[\bar{\zeta}\varphi''(\zeta) + \psi'(\zeta)], \tag{IV, 13}$$

где $\Re$ обозначает «вещественную часть», через $\overline{\varphi}(\bar{\zeta})$ обозначается, вообще, выражение, сопряженное с $\varphi(\zeta)$ (в частности $\bar{\zeta} = x - iy$) и

$$\alpha = \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} = \frac{(3 - 4\sigma)(1 + \sigma)}{E}, \quad \beta = \frac{1}{2\mu} = \frac{1 + \sigma}{E}. \tag{IV, 14}$$

Функция φ и ψ должны быть голоморфны в каждом отдельном участке.** Компоненты напряжения (X_n, Y_n), приложенного к элементу ds контура со стороны положительной нормали даются формулой: ***

$$(X_n + iY_n)\,ds = -i\,d[\varphi(\zeta) + \zeta\overline{\varphi'}(\bar{\zeta}) + \overline{\psi}(\bar{\zeta})], \tag{IV, 15}$$

при чем предполагается, что положительное направление нормали n и элемента ds расположены друг относительно друга, как, соответственно, оси Ox и Oy.

В соответствии с этим, условие (IV, 7) может быть выражено так

$$\varphi(\zeta) + \zeta\overline{\varphi'}(\bar{\zeta}) + \overline{\psi}(\bar{\zeta}) = \text{const}. \tag{IV, 16}$$

* Вывод см., напр., в моей работе: Recherches sur les problèmes aux limites relatifs à l'équation biharmonique etc., которая в настоящий момент печатается в Math. Annalen.

** См. мою названную работу.

*** Многозначные члены в функциях φ, ψ отпадают в нашем случае, так как главные векторы усилий, приложенных к границам участков, все равны нулю (см. цитированную мою работу).

(на свободной боковой поверхности), а условие (IV, 8) —

$$[\varphi(\zeta)+\zeta\overline{\varphi'}(\bar{\zeta})+\overline{\psi}(\bar{\zeta})]_j=[\varphi(\zeta)+\zeta\overline{\varphi'}(\bar{\zeta})+\overline{\psi}(\bar{\zeta})]_k+\text{const.} \tag{IV, 17}$$

(на линиях раздела).

Далее, условие (IV, 6) (для случая растяжения) напишется, очевидно, так

$$\begin{aligned}&[\alpha\varphi(\zeta)-\beta\zeta\overline{\varphi'}(\bar{\zeta})-\beta\overline{\psi}(\bar{\zeta})]_j-\\&-[\alpha\varphi(\zeta)-\beta\zeta\overline{\varphi'}(\bar{\zeta})-\beta\overline{\psi}(\bar{\zeta})]_k=a(\sigma_j-\sigma_k)\zeta\end{aligned} \tag{IV, 18}$$

а условие (IV, 11) (для случая изгиба)

$$\begin{aligned}&[\alpha\varphi(\zeta)-\beta\zeta\overline{\varphi'}(\bar{\zeta})-\beta\overline{\psi}(\bar{\zeta})]_j-\\&-[\alpha\varphi(\zeta)-\beta\zeta\overline{\varphi'}(\bar{\zeta})-\beta\overline{\psi}(\bar{\zeta})]_k=-\frac{a}{2}(\sigma_j-\sigma_k)\zeta^2.\end{aligned} \tag{IV, 19}$$

§ 23. **Примеры.** Рассмотрим случай, когда свободная поверхность есть круговой цилиндр, а поверхность раздела двух сред — также круговой цилиндр с той же осью. Область S_1 пусть будет ограничена окружностью радиуса R_1, а область S_2 — той же окружностью и окружностью радиуса $R_2>R_1$.

В этом случае легко найти решение плоской задачи, разлагая функции φ и ψ в области S_1 по положительным степеням ζ и в области S_2 — по отрицательным и положительным степеням. Подстановка в (IV, 16), (IV, 17), и в одно из равенств (IV, 18), (IV, 19) сразу определит коэффициенты; произвольные постоянные, которые могут остаться, не имеют никакого влияния на распределение напряжений (это следует из единственности решения задачи).

Однако, интересующие нас случаи настолько просты, что легко сразу угадать форму решения и вместо бесконечных рядов брать с самого начала только несколько членов; см. ниже.

1°. Решим сперва задачу о растяжении. Легко догадаться, что в этом случае достаточно взять:

$$\begin{aligned}&\varphi_1(\zeta)=A_1\zeta,\ \psi_1(\zeta)=0\quad(\text{в } S_1),\\&\varphi_2(\zeta)=A_2\zeta,\ \psi_2(\zeta)=\frac{B_2}{\zeta}\quad(\text{в } S_2),\end{aligned} \tag{IV, 20}$$

где A_1, A_2, B_2 — вещественные постоянные, а значки 1 и 2 при φ и ψ указывают на принадлежность функций областям S_1 или S_2.

Условия (IV, 16), (IV, 17), (IV, 18) дают соответственно (мы полагаем равными нулю фигурирующие в этих условиях произвольные постоянные)

$$2A_2\zeta + B_2\frac{1}{\bar{\zeta}} = 0 \quad (\text{при } |\zeta| = R_2),$$

$$2A_1\zeta = 2A_2\zeta + B_2\frac{1}{\bar{\zeta}} \quad (\text{при } |\zeta| = R_1),$$

$$(\alpha_1 - \beta_1)A_1\zeta = (\alpha_2 - \beta_2)A_2\zeta - \beta_2 B_2\frac{1}{\bar{\zeta}} + a(\sigma_1 - \sigma_2)\zeta \quad (\text{при } |\zeta| = R_1);$$

полагая, далее, $\zeta = re^{i\vartheta}$, $\bar{\zeta} = re^{-i\vartheta}$ (где r и ϑ, очевидно, полярные координаты на плоскости Oxy) получаем, по сокращении на $e^{i\vartheta}$

$$2A_2R_2 + \frac{B_2}{R_2} = 0, \quad 2A_1R_1 = 2A_2R_1 + \frac{B_2}{R_1}$$

$$(\alpha_1 - \beta_1)A_1R_1 = (\alpha_2 - \beta_2)A_2R_1 - \frac{\beta_2 B_2}{R_1} + a(\sigma_1 - \sigma_2)R_1.$$

Предыдущие уравнения определяют коэффициенты A_1, A_2, B_2. Именно:

$$A_1 = \frac{a(\sigma_1 - \sigma_2)(R_2^2 - R_1^2)}{(\alpha_1 - \beta_1)(R_2^2 - R_1^2) + (\alpha_2 - \beta_2)R_1^2 + 2\beta_2 R_2^2},$$

$$A_2 = -\frac{a(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^2}{(\alpha_1 - \beta_1)(R_2^2 - R_1^2) + (\alpha_2 - \beta_2)R_1^2 + 2\beta_2 R_2^2},$$

$$B_2 = \frac{2a(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^2R_2^2}{(\alpha_1 - \beta_1)(R_2^2 - R_1^2) + (\alpha_2 - \beta_2)R_1^2 + 2\beta_2 R_2^2};$$

напомним, что α_1, β_1, α_2, β_2 даются формулами (IV, 14), где E и σ надо взять с соответствующими значками; а именно будем иметь:

$$\alpha_1 - \beta_1 = \frac{2(1+\sigma_1)(1-2\sigma_1)}{E_1}, \quad \alpha_2 - \beta_2 = \frac{2(1+\sigma_2)(1-2\sigma_2)}{E_2}, \quad \beta_2 = \frac{1+\sigma_2}{E_2}$$

Так как коэффициент Пуассона σ всегда $< \frac{1}{2}$, то предыдущие величины все положительны.

Напряжения, приложенные к верхнему основанию, слагаются из напряжений $Z_z = aE_j$ $(j = 1, 2)$ и из напряжений, определяемых формулами (IV, 4), (IV, 13) и (IV, 20):

$$Z_z = \sigma_j(X_x + Y_y) = 4\sigma_j A_j.$$

Эти напряжения статически эквивалентны силе, приложенной в центре и параллельной оси Oz. Обозначая алгебраическое значение этой силы (по оси Oz) через F получим без всякого труда:

$$F = a(S_E + K),$$

где

$$S_E = S_1 E_1 + S_2 E_2 = \pi [R_1^2 E_1 + (R_2^2 - R_1^2) E_2]$$

и

$$K = 4(S_1 \sigma_1 A_1 + S_2 \sigma_2 A_2) =$$

(IV, 21)

$$= \frac{4\pi(\sigma_1 - \sigma_2)^2 (R_2^2 - R_1^2) R_1^2}{(\alpha_1 - \beta_1)(R_2^2 - R_1^2) + (\alpha_2 - \beta_2) R_1^2 + 2\beta_2 R_2^2};$$

предыдущее выражение показывает, что всегда $K > 0$.

Итак, постоянная a определяется формулой (при заданном F):

(IV, 22)

$$a = \frac{F}{S_E + K}.$$

Так как a представляет собою, на основании (IV, 1), относительное продольное удлинение бруса, то на основании предыдущей формулы можем заключить, что относительное удлинение, при одной и той же растягивающей силе, всегда меньше, чем в случае материалов с одним и тем же коэффициентом Пуассона. Иными словами, различие коэффициентов Пуассона увеличивает сопротивление растяжению (или сжатию), независимо от того, какой из двух материалов обладает бо́льшим коэффициентом Пуассона.

2°. Перейдем теперь к задаче об изгибании парой. В этом случае, условиям вспомогательной плоской задачи можно удовлетворить, полагая:

$$\varphi_1 = A_1 \zeta^2, \quad \psi_1 = 0$$

(IV, 23)

$$\varphi_2 = A_2 \zeta^2, \quad \psi_2 = \frac{B_2}{\zeta^2} + C_2,$$

где, A_1, A_2, B_2, C_2 — вещественные постоянные.

Подстановка этих значений в (IV, 16), (IV, 17) и (IV, 19) дает совершенно так же, как и в предыдущем примере, четыре уравнения для определения постоянных A_1, A_2, B_2, C_2, решая которые без всякого труда получаем значения этих постоянных. Мы выписываем значения трех первых, так как постоянная C_2 не влияет на распределение напряжений.

$$A_1 = -\frac{1}{2}\frac{a(\sigma_1-\sigma_2)(R_2^4-R_1^4)}{\alpha_1(R_2^4-R_1^4)+\alpha_2 R_1^4+\beta_2 R_2^4},$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\frac{a(\sigma_1-\sigma_2)R_1^4}{\alpha_1(R_2^4-R_1^4)+\alpha_2 R_1^4+\beta_2 R_2^4},$$

$$B_2 = -\frac{1}{2}\frac{a(\sigma_1-\sigma_2)R_1^4 R_2^4}{\alpha_1(R_2^4-R_1^4)+\alpha_2 R_1^4+\beta_2 R_2^4}.$$

Напряжения Z_z, относящиеся к этой вспомогательной задаче, даются формулами:

$$Z_z = \sigma_j(X_x + Y_y) = 4\sigma_j \Re\varphi_j'(\zeta) = 8\sigma_j A_j x \quad (j=1,2).$$

Главный вектор этих напряжений, приложенных к верхнему основанию, равен очевидно нулю. Эти напряжения статически эквивалентны паре, момент которой параллелен оси Oy и равен

$$M'' = -8\sigma_1 A_1 \int\int_{S_1} x^2\,dxdy - 8\sigma_2 A_2 \int\int_{S_2} x^2\,dxdy =$$

$$= -2\pi\sigma_1 A_1 R_1^4 - 2\pi\sigma_2 A_2(R_2^4-R_1^4).$$

Момент же M' усилий, определяемых формулой (IV, 9) также параллелен оси Oy и равен

$$M' = aI_B = \frac{a\pi}{4}[E_1 R_1^4 + E_2(R_2^4-R_1^4)].$$

Следовательно, момент изгибающей пары равен

$$M = M' + M'' = a(I_B + L),$$

где

(IV, 24)
$$L = \frac{\pi(\sigma_1-\sigma_2)^2(R_2^4-R_1^4)R_1^4}{\alpha_1(R_2^4-R_1^4)+\alpha_2 R_1^4+\beta_2 R_2^4}.$$

Таким образом, постоянная a определится формулой:

(IV, 25)
$$a = \frac{M}{I_B + L}.$$

Как легко видеть, перемещения u, v, соответствующие вспомогательной плоской задаче, равны 0 при $x = y = 0$. Поэтому уравнение центральной

линии будет: $u = \frac{1}{2} a z^2$, откуда следует, что a есть кривизна центральной линии.

Формула (IV, 25) показывает, что закон Бернулли-Эйлера имеет место и в рассматриваемом случае, только жесткость при изгибе будет уже не I_E, а бо́льшей величиной $I_E + L$.

Таким образом, различие коэффициентов Пуассона повышает жесткость при изгибе, каков бы ни был знак разности $\sigma_1 - \sigma_2$.

Ленинград,
18 IV 1932.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles - Отделение математических и естественных наук

THE ORBIT OF THE PLANET 659 NESTOR FROM THE OBSERVATIONS IN THE YEARS 1908—1919

By N. MICHALSKIJ (N. Mikhalsky).

(*Presenté par* A. A. Belopolskij, *membre de l'Académie des Sciences*)

1. Mr. J. A. Kristensen has given the elements of Nestor (based on the observations in the years 1908—1919), taking into account the perturbating influence of two planets: Jupiter and Saturn.[1]

In the present article I research the elements of Nestor, taking into account the perturbating influence of eight great planets: Mercury, Venus, the Earth, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus and Neptune.

The preliminary initial elements of Nestor, according to Kristensen, are as follows:

Epoch $t_0 = 1908$ April 12.0, mean time Greenwich.[2]

Mean ecliptic and mean equinox 1910.0.

$$\begin{aligned} \text{Mean long. } L_0 &= 199^\circ\ 5'14''.5 \\ \text{Long. per. } \pi &= 319^\circ\ 9'\ 9''.4 \\ \text{Long. node } \Omega &= 350^\circ\ 1'28''.7 \\ \text{Inclination } i &= \ \ 4^\circ 31'44''.0 \\ \text{Angle of ecc. } \varphi &= \ \ 6^\circ\ 7'12''.9 \\ \text{Mean motion } \mu &= 301''.21936 \end{aligned} \qquad \text{(IV)}$$

The masses of the great planets have been taken according to Newcomb.[3]

1 Publikationer og mindre Meddelelser fra Københavns Observatorium, № 37, p. 9.

2 In this article the time is so reckoned as before the reform of 1925.

3 See, for example, Connaissance des Temps, 1915, p. XV; for the Earth has been taken the sum $\oplus + \mathbb{C}$.

Table 1

Summation of perturbations by the Earth

Greenwich mean noon	μ II_f	μ I_f	L_0 Γ	π I_f	φ I_f	Ω I_f	i I_f
1908 Mar. 23		—0.″0041	+0.″012	— 0.″417	—0.″025	—0.″009	—0.″002
May 2	—0.″00	+0.0636	+1.870	+ 1.933	+1.231	+0.272	+0.057
June 11	+0.06	+0.1997	+2.809	+13.211	+2.504	+0.673	+0.129
July 21	+0.26	+0.3557	+2.558	+28.977	+3.283	+1.024	+0.184
Aug. 30	+0.62	+0.4760	+1.222	+42.970	+3.278	+1.139	+0.200
Oct. 9	+1.09	+0.5123	—0.719	+48.954	+2.521	+0.898	+0.170
Nov. 18	+1.61	+0.4432	—2.495	+43.390	+1.401	+0.343	+0.109
Dec. 28	+2.05	+0.2919	—3.323	+28.018	+0.517	—0.286	+0.048
1909 Febr. 6	+2.34	+0.1216	—2.824	+ 9.787	+0.537	—0.661	+0.015
Mar. 18	+2.16	+0.0026	—1.225	— 3.076	+0.914	—0.571	+0.022
Apr. 27	+2.47	—0.0226	+0.819	— 5.467	+1.908	—0.044	+0.059
June 6	+2.44	+0.0505	+2.565	+ 3.034	+2.820	+0.700	+0.105
July 16	+2.49	+0.1953	+3.445	+18.934	+3.237	+1.347	+0.140
Aug. 25	+2.69	+0.3626	+3.184	+36.172	+2.970	+1.603	+0.153
Oct. 4	+3.05	+0.4906	+1.864	+47.773	+2.131	+1.303	+0.139
Nov. 13	+3.54	+0.5249	—0.026	+48.428	+1.140	+0.527	+0.111
Dec. 23	+4.07	+0.4448	—1.702	+37.498	+0.560	—0.376	+0.084
1910 Febr. 1	+4.51	+0.2815	—2.433	+20.153	+0.771	—0.951	+0.070
Mar. 13	+4.79	+0.1039	—1.928	+ 4.526	+1.712	—0.918	+0.071
Apr. 22	+4.90	—0.0194	—0.422	— 2.932	+2.946	—0.321	+0.079
June 1	+4.88	—0.0476	+1.516	— 0.036	+3.923	+0.552	+0.087
July 11	+4.83	+0.0266	+3.223	+11.371	+4.203	+1.329	+0.090
Aug. 20	+4.86	+0.1800	+4.146	+26.692	+3.611	+1.684	+0.089
Sept. 29	+5.04	+0.3610	+3.961	+39.840	+2.323	+1.443	+0.091
Nov. 8	+5.40	+0.5002	+2.716	+45.256	+0.880	+0.693	+0.100
Dec. 18	+5.90	+0.5370	+0.896	+40.695	—0.003	—0.213	+0.116
1911 Jan. 27	+6.43	+0.4529	—0.721	+28.955	+0.180	—0.825	+0.130
Mar. 8	+6.89	+0.2846	—1.463	+16.294	+1.893	—0.873	+0.131

Continued Table 1

Greenwich mean noon	μ II_f	μ I_f	L_0 I_f	π I_f	φ I_f	Ω I_f	i I_f
		+0.″2846	—1.″463	+16.″294	+1.″393	—0.″873	+0.″131
1911 Apr. 17	+ 7.″17	+0.1012	—1.071	+ 8.606	+3.107	—0.400	+0.114
May 27	+ 7.27	—0 0309	+0.283	+ 8.684	+1.619	+0.324	+0.083
July 6	+ 7.24	—0.0691	+2.139	+15.753	+5.346	+0.974	+0.050
Aug. 15	+ 7.17	—0.0003	+3.886	+26.358	+4.980	+1.297	+0.031
Sept. 24	+ 7.17	+0.1569	+4.933	+35.784	+3.581	+1.180	+0.039
Nov. 3	+ 7.33	+0.3486	+4.886	+39.715	+1.660	+0.701	+0.077
Dec. 13	+ 7.68	+0.4984	+3.745	+36.385	+ 0 056	+0.113	+0.131
1912 Jan. 22	+ 8.18	+0.5424	+1.990	+28.041	—0.474	—0.291	+0.174
Mar. 2	+ 8.72	+0.4647	+0.371	+19.717	+0.297	—0.361	+0.183
Apr. 11	+ 9.18	+0.3020	—0.477	+16.037	+1.976	— 0.149	+0.152
May 21	+ 9.49	+0.1183	—0.267	+18.870	+3.836	+0.174	+0.094
June 30	+ 9.60	—0.0225	+0.925	+27.011	+5.162	+0.443	+0.035
Aug. 9	+ 9.58	—0.0736	+2.736	+36.989	+5.470	+0.568	0.000
Sept. 18	+ 9.51	—0.0148	+4.578	+44.177	+4.630	+0.553	+0.006
Oct. 28	+ 9.49	+0.1393	+5.785	+44.584	+2.940	+0.474	+0.055
Dec. 7	+ 9.63	+0.3329	+5.878	+37.234	+1.108	+0.424	+0.126
1913 Jan. 16	+ 9.96	+0.4862	+4.825	+25.477	—0.044	+0 436	+0.185
Febr. 25	+10.45	+0.5373	+3.101	+15.369	—0.048	+ 0.455	+0.202
Apr. 6	+10.99	— 0,4722	+1.432	+12.086	+0.974	+0.394	+0.171
May 16	+11.46	+0.3228	+0.441	+17.373	+2.482	+0.216	+0.110
June 25	+11.78	+0.1454	+0.472	+29.356	+3.821	—0.031	+0.046
Aug. 4	+11.93	+0.0011	+1.547	+43.582	+4.478	—0.225	+0.006
Sept. 13	+11.93	—0.0587	+3.366	+54.362	+4.195	—0.225	+0.006
Oct. 23	+11.87	—0.0078	+5.322	+56.563	+ 3.107	+0.053	+0.046
Dec. 2	+11.86	+0.1398	+6.658	+48.141	—1.716	+0.549	+0.108
1914 Jan. 11	+12.00	+0.3259	+6.828	+32.307	+0.688	+1.035	+0 161
Febr. 20	+12.33	+0.4728	+5.804	+16.396	+0.473	+1.234	+0.180
Apr. 1	+12.80	+0.5248	+4.069	+ 7.591	+1.060	+1.004	+0.161

Continued Table 1

Greenwich mean noon	μ		L_0	π	φ	Ω	i
	II_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f
		+0.″5248	+4.″069	+ 7.″691	+1.″060	+1.″004	+0.″161
1914 May 11	+13.″33	+0.4697	+2.328	+ 9.405	+2.062	+0.418	+0.118
June 20	+13.80	+0.3334	+1.216	+20.920	+2.970	—0.286	+0.072
July 30	+14.13	+0.1651	+1.138	+37.763	+3.365	—0.805	+0.042
Sept. 8	+14.30	+0.0239	+2.192	+53.504	+3.055	—0.876	+0.038
Oct. 18	+14.32	—0.0355	+4.091	+61.497	+2.161	—0.399	+0.059
Nov. 27	+14.28	+0.0145	+6.152	+57.705	+1.122	+0.465	+0.092
1915 Jan. 6	+14.30	+0.1565	+7.532	+43.357	+0.498	+1.313	+0.120
Febr. 15	+14.46	—0.3304	+7.678	+25.034	+0.623	+1.707	+0.131
Mar. 27	+14.79	+0.4653	+6.619	+10.899	+1.395	+1.447	+0.125
May 6	+15.25	+0.5124	+4.833	+ 6.584	+2.394	+0.662	+0.111
June 15	+15.76	+0.4612	+3.022	+13.027	+3.121	—0.300	+0.098
July 25	+16.22	+0.3326	+1.842	+27.315	+3.207	—1.033	+0.092
Sept. 3	+15.56	+0.1717	+1.761	+43.782	+2.540	—1.210	—0.091
Oct. 13	+16.73	+0.0380	+2.912	+55.616	+1.335	—0.712	+0.091
Nov. 22	+16.77	—0.0132	+4.948	+57.402	+0.124	+0.268	+0.087
1916 Jan. 1	+16.75	+0.0423	+7.069	+48.235	—0.466	+1.265	+0.079
Febr. 10	+16.80	+0.1807	+8.388	+32.682	—0.089	+1.785	+0.073
Mar. 21	+16.98	+0.3419	+8.418	+18.101	+1.087	+1.598	+0.076
Apr. 30	+17.32	+0.4628	+7.247	+10.503	+2.507	+0.885	+0.092
June 9	+17.78	+0.5023	+5.384	+12.172	+3.546	—0.140	+0.116
July 19	+18.28	+0.4494	+3.523	+21.670	+3.744	—0.913	+0.159
Aug. 28	+18.73	+0.3223	+2.356	+34.768	+2.947	—1.164	+0.148
Oct. 7	+19.06	+0.1658	+2.395	+45.748	+1.393	—0.777	+0.133
Nov. 16	+19.22	+0.0414	+3.739	+49.500	—0.287	+0.079	+0.096
Dec. 26	+19.26	+0.0031	+5.914	+44.239	—1.298	+0.988	+0.052
1917 Febr. 4	+19.27	+0.0672	+8.010	+32.979	—1.123	+1.507	+0.024
Mar. 16	+19.33	+0.2035	+9.177	+21.576	+0.156	+1.428	+0.029
Apr. 25	+19.54	+0.3548	+9.035	+15.159	+1.948	+0.856	+0.067

Continued Table 1

Greenwich mean noon	μ II_f	μ I_f	L_0 I_f	π I_f	φ I_f	Ω I_f	i I_f
		+0″3518	+ 9.035	+15.159	+1.948	+0.856	+0.067
1917 June 4	+19″89						
		+0.4650	+ 7.734	+15.869	+3.496	+0.090	+0.123
July 14	+20.36						
		+0.4966	+ 5.792	+22.661	+4.181	−0.537	+0.174
Aug. 23	+20.85						
		+0.4379	+ 3.922	+32.110	+3.697	−0.782	+0.196
Oct. 2	+21.29						
		+0.3068	+ 2.858	+39.620	+2.168	−0.564	+0.175
Nov. 11	+21.60						
		+0.1516	+ 3.114	+41.206	+0.188	−0.004	+0.115
Dec. 21	+21.75						
		+0.0369	+ 4.682	+35.770	−1.347	+0.609	+0.042
1918 Jan. 30	+21.79						
		+0.0123	+ 6.931	+26.219	−1.711	+0.979	−0.007
Mar. 11	+21.80						
		+0.0852	+ 8.913	+17.758	−0.771	+0.979	−0.007
Apr. 20	+21.88						
		+0.2216	+ 9.880	+14.583	+0.999	+0.685	+0.042
May 30	+22.10						
		+0.3678	+ 9.559	+17.900	+2.834	+0.284	+0.117
July 9	+22.47						
		+0.4716	+ 8.135	+25.942	+4.017	−0.039	+0.187
Aug. 18	+22.94						
		+0.4957	+ 6.138	+34.919	+4.092	−0.175	+0.221
Sept. 27	+23.44						
		+0.4274	+ 4.313	+40.310	+3.000	−0.111	+0.202
Nov. 6	+23.87						
		+0.2878	+ 3.432	+38.703	+1.169	+0.071	+0.134
Dec. 16	+24.16						
		+0.1316	+ 3.945	+29.995	−0.579	+0.248	+0.047
1919 Jan. 25	+24.29						
		+0.0257	+ 5.687	+18.170	−1.425	+0.337	−0.015
Mar. 6	+24.31						
		+0.0132	+ 7.916	+ 9.180	−1.029	+0.343	−0.023
Apr. 15	+24.33						
		+0.0942	+ 9.734	+ 7.404	+0.332	+0.334	+0.024
May 25	+24.42						
		+0.2338	+10.512	+13.641	+2.021	+0.367	+0.103
July 4	+24.65						

The perturbations of Nestor caused by Mercury and Venus have been calculated by the formulae (D_1), (D_2) of my article in «Astronomische Nachrichten», B. 238, № 5694.

The perturbations caused by the remaining great planets I have calculated by the method of mechanical quadratures (variation of constants with the forty-day interval; the initial epoch $t_0 = 1908$ Apr. 12.0, mean time Greenwich; the mean ecliptic 1910.0; the elements of Nestor

Table 2

Summation of perturbations by Mars

Greenwich mean noon	μ Π_f	μ I_f	L_0 I_f	π I_f	φ I_f	Ω I_f	i I_f
1908 Mar. 23		0.0000	—0.001	+0.004	—0.001	0.000	0.000
May 2	0.00	—0.0066	—0.001	—0.610	—0.047	—0.010	—0.002
June 11	—0.01	—0.0129	+0.022	—1.258	—0.077	—0.017	—0.001
July 21	—0.02	—0.0187	+0.065	—1.890	—0.090	—0.020	—0.001
Aug. 30	—0.04	—0.0236	+0.125	—2.467	—0.087	—0.018	—0.001
Oct. 9	—0.06	—0.0274	+0.201	—2.952	—0.068	—0.011	0.000
Nov. 18	—0.09	—0.0301	+0.290	—3.311	—0.036	+0.001	+0.001
Dec. 28	—0.12	—0.0313	+0.388	—3.500	+0.008	+0.019	+0.005
1909 Febr. 6	—0.15	—0.0307	+0.488	—3.469	+0.059	+0.042	+0.005
Mar. 18	—0.18	—0.0277	+0.582	—3.166	+0.112	+0.069	+0.007
Apr. 27	—0.21	—0.0222	+0.661	—2.565	+0.158	+0.095	+0.009
June 6	—0.23	—0.0143	+0.711	—1.706	+0.187	+0.115	+0.010
July 16	—0.25	—0.0050	+0.722	—0.721	+0.190	+0.121	+0.008
Aug. 25	—0.25	+0.0040	+0.691	+0.198	+0.168	+0.110	+0.007
Oct. 4	—0.25	+0.0113	+0.627	+0.871	+0.125	+0.084	+0.006
Nov. 13	—0.24	+0.0158	+0.544	+1.207	+0.075	+0.049	+0.005
Dec. 23	—0.22	+0.0174	+0.457	+1.216	+0.029	+0.012	+0.004
1910 Febr. 1	—0.20	+0.0164	+0.377	+0.964	—0.006	—0.021	+0.003
Mar. 13	—0.19	+0.0134	+0.310	+0.532	—0.025	—0.047	+0.003
Apr. 22	—0.17	+0.0090	+0.257	—0.007	—0.028	—0.064	+0.003
June 1	—0.16	+0.0035	+0.221	—0.596	—0.015	—0.072	+0.003
July 11	—0.16	—0.0029	+0.202	—1.187	+0.012	—0.070	+0.003
Aug. 20	—0.16	—0.0097	+0.200	—1.741	+0.054	—0.060	+0.003
Sept. 29	—0.17	—0.0168	+0.217	—2.218	+0.108	—0.041	+0.003
Nov. 8	—0.19	—0.0237	+0.254	—2.575	+0.170	—0.015	+0.003
Dec. 18	—0.21	—0.0301	+0.314	—2.767	+0.238	+0.015	+0.002
1911 Jan. 27	—0.24	—0.0352	+0.397	—2.747	+0.305	+0.047	+0.001
Mar. 8	—0.28	—0.0384	+0.500	—2.486	+0.360	+0.076	0.000

Continued Table 2

Greenwich mean noon	μ		L_0	π	φ	Ω	i
	II_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f
		—0″.0384	+0″.500	—2″.486	+0360	+0″.076	0″.000
1911 Apr. 17	—0″.32	—0.0386	+0.614	—1″.998	+0.391	+0.097	—0.001
May 27	—0.36	—0.0354	+0.723	—1.357	+0.386	+0.105	—0.001
July 6	—0.39	—0.0288	+0.810	—0.691	+0.341	+0.098	—0.001
Aug. 15	—0.42	—0.0199	+0.863	—0.139	+0.264	+0.079	0.000
Sept. 24	—0.44	—0.0103	+0.880	+0.208	+0.173	+0.054	+0.002
Nov. 3	—0.45	—0.0015	+0.866	+0.330	+0.083	+0.028	+0.004
Dec. 13	—0.45	+0.0058	+0.829	+0.260	+0.006	+0.007	+0.006
1912 Jan. 22	—0.45	+0.0113	+0.777	+0.054	—0.052	—0.008	+0.008
Mar. 2	—0.43	+0.0148	+0.717	—0.235	—0.088	—0.017	+0.009
Apr. 11	—0.42	+0.0165	+0.653	—0.560	—0.104	—0.021	+0.010
May 21	—0.40	+0.0164	+0.589	—0.880	—0.100	—0.021	+0.010
June 30	—0.39	+0.0146	+0.528	—1.155	—0.077	—0.018	+0.009
Aug. 9	—0.37	+0.0111	+0.470	—1.359	—0.036	—0.013	+0.008
Sept. 18	—0.36	+0.0059	+0.421	—1.451	+0.022	—0.008	+0.006
Oct. 28	—0.35	—0.0009	+0.384	—1.393	+0.093	—0.004	+0.004
Dec. 7	—0.36	—0.0091	+0.368	—1.138	+0.172	—0.002	+0.001
1913 Jan. 16	—0.36	—0.0181	+0.377	—0.685	+0.251	—0.003	—0.002
Febr. 25	—0.38	—0.0269	+0.419	—0.049	+0.317	—0.005	—0.004
Apr. 6	—0.41	—0.0341	+0.496	+0.681	+0.356	—0.007	—0.005
May 16	—0.44	—0.0383	+0.601	+1.363	+0.357	—0.006	—0.005
June 25	—0.48	—0.0388	+0.719	+1.851	+0.322	0.000	—0.003
Aug. 4	—0.52	—0.0361	+0.830	+2.059	+0.263	+0.011	—0.001
Sept. 13	—0.56	—0.0309	+0.921	+1.978	+0.194	+0.025	+0.002
Oct. 23	—0.59	—0.0243	+0.986	+1.657	+0.128	+0.041	+0.004
Dec. 2	—0.61	—0.0171	+1.026	+1.167	+0.071	+0.056	+0.006
1914 Jan. 11	—0.63	—0.0099	+1.042	+0.579	+0.027	+0.068	+0.007
Febr. 20	—0.64	—0.0031	+1.037	—0.050	—0.002	+0.075	+0.008
Apr. 1	—0.64	+0.0030	+1.014	—0.675	—0.016	+0.076	+0.008

Continued Table 2

Greenwich mean noon	μ		L_0	π	φ	Ω	i
	II_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f
		+0″.0030	+1″.014	—0″.675	—0″.016	+0″.076	+0″.008
1914 May 11	—0″.64						
		+0.0082	+0.976	—1.254	—0.015	+0.070	+0.008
June 20	—0.63						
		+0.0122	+0.923	—1.748	—0.002	+0.057	+0.007
July 30	—0.62						
		+0.0148	+0.857	—2.111	+0.024	+0.036	+0.006
Sept. 8	—0.63						
		+0.0157	+0.781	—2.290	+0.060	+0.008	+0.005
Oct. 18	—0.62						
		+0.0143	+0.698	—2.229	+0.102	—0.025	+0.004
Nov. 27	—0.60						
		+0.0104	+0.617	—1.880	+0.143	—0.059	+0.003
1915 Jan. 6	—0.59						
		+0.0039	+0.551	—1.229	+0.173	—0.088	+0.002
Febr. 15	—0.59						
		—0.0046	+0.512	—0.340	+0.182	—0.105	+0.002
Mar. 27	—0.59						
		—0.0138	+0.514	+0.638	+0.165	—0.103	+0.002
May 6	—0.61						
		—0.0221	+0.558	+1.491	+0.123	—0.082	+0.002
June 15	—0.63						
		—0.0281	+0.637	+2.078	+0.065	—0.047	+0.002
July 25	—0.66						
		—0.0314	+0.737	+2.334	+0.004	—0.006	+0.002
Sept. 3	—0.69						
		—0.0321	+0.843	+2.288	—0.049	+0.033	+0.002
Oct. 13	—0.72						
		—0.0307	+0.945	+2.011	—0.089	+0.065	+0.002
Nov. 22	—0.75						
		—0.0277	+1.036	+1.577	—0.114	+0.088	+0.002
1916 Jan. 1	—0.78						
		—0.0235	+1.110	+1.043	—0.121	+0.102	+0.002
Febr. 10	—0.80						
		—0.0185	+1.167	+0.458	—0.110	+0.105	+0.002
Mar. 21	—0.82						
		—0.0128	+1.204	—0.138	—0.084	+0.098	+0.002
Apr. 30	—0.83						
		—0.0068	+1.221	—0.708	—0.043	+0.082	+0.002
June 9	—0.84						
		—0.0006	+1.216	—1.210	+0.017	+0.057	+0.003
July 19	—0.84						
		+0.0053	+1.187	—1.599	+0.081	+0.025	+0.004
Aug. 28	—0.84						
		+0.0105	+1.133	—1.822	+0.148	—0.012	+0.005
Oct. 7	—0.83						
		+0.0142	+1.053	—1.828	+0.211	—0.050	+0.006
Nov. 16	—0.81						
		+0.0156	+0.953	—1.586	+0.256	—0.082	+0.007
Dec. 26	—0.80						
		+0.0140	+0.845	—1.114	+0.269	—0.101	+0.008
1917 Febr. 4	—0.78						
		+0.0094	+0.749	—0.504	+0.242	—0.102	+0.008
Mar. 16	—0.77						
		+0.0025	+0.684	+0.099	+0.178	—0.086	+0.007
Apr. 25	—0.77						
		—0.0055	+0.661	+0.555	+0.090	—0.058	+0.005

Continued Table 2

Greenwich mean noon	μ		L_0	π	φ	Ω	i
	II_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f
		—0.″0055	+0.″661	+0.″555	+0.″090	−0.058	+0.″005
1917 June 4	—0.″78	—0.0132	+0.679	+0.791	—0.004	−0.025	+0.003
July 14	—0.79	—0.0196	+0.730	+0.805	—0.089	+0.005	+0.001
Aug. 23	—0.81	—0.0243	+0.804	+0.634	—0.157	+0.029	—0.001
Oct. 2	—0.83	—0.0273	+0.891	+0.333	—0.203	+0.046	—0.003
Nov. 11	—0.86	—0.0286	+0.986	—0.047	—0.227	+0.055	—0.004
Dec. 21	—0.89	—0.0284	+1.082	—0.459	—0.230	+0.058	—0.004
1918 Jan. 30	—0.92	—0.0269	+1.173	—0.860	—0.213	+0.055	—0.004
Mar. 11	—0.94	—0.0241	+1.255	—1.213	—0.177	+0.048	—0.003
Apr. 20	—0.97	—0.0199	+1.324	—1.481	—0.122	+0.037	—0.001
May 30	—0.99	—0.0145	+1.375	—1.628	—0.051	+0.024	+0.001
July 9	—1.00	—0.0080	+1.402	—1.617	+0.033	+0.010	+0.004
Aug. 18	—1.01	—0.0009	+1.398	—1.419	+0.122	—0.003	+0.007
Sept. 27	—1.01	+0.0062	+1.358	—1.034	+0.203	—0.013	+0.010
Nov. 6	—1.01	+0.0120	+1.280	—0.503	+0.260	—0.018	+0.012
Dec. 16	—0.99	+0.0154	+1.176	+0.053	+0.280	—0.019	+0.012
1919 Jan. 25	—0.98	+0.0156	+1.063	+0.495	+0.257	—0.017	+0.011
Mar. 6	—0.96	+0.0127	+0.963	+0.710	+0.199	−0.015	+0.008
Apr. 15	—0.95	+0.0074	+0.890	+0.662	+0.122	—0.014	+0.005
May 25	—0.94	+0.0009	+0.851	+0.384	+0.042	—0.015	+0.002
July 4	—0.94						

have been varied for every interval). The Tables 1—6 give the summation of the differential variations of the perturbations respectively by the Earth, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptune; the designations in these Tables have the same sense as in the Bauschinger's manual («Die Bahnbestimmung der Himmelskörper», 1906, p. 507).

2. The perturbations of the elements (IV) for the moments t of 11 normal places of the observations 1908—1919 are given in Table 7. The

Table 3

Summation of perturbations by Jupiter

Greenwich mean noon	μ Π_f	μ I_f	L_0 I_f	π I_f	φ I_f	Ω I_f	i I_f
1908 Mar. 23		—0.0013	+ 0.005	— 0.384	— 0.020	— 0.002	0.000
May 2	+ 0.01	+0.1661	+ 25.862	— 39.755	— 12.111	+ 0 376	+0.079
June 11	+ 0.17	+0.3614	+ 51.563	— 69.720	+ 24.625	+ 0.774	+0.151
July 21	+ 0.53	+0.5824	+ 77.077	— 90.311	+ 37.417	+ 1.164	+0.212
Aug. 30	+ 1.12	+0.8263	+102.377	— 101.621	+ 50.385	+ 1.518	+0.261
Oct. 9	+ 1.94	+1.0902	+127.435	— 103.848	+ 63.431	+ 1.804	+0.296
Nov. 18	+ 3.03	+1.3710	+152.225	— 97.276	+ 76.459	+ 1.991	+0.316
Dec 28	+ 4.40	+1.6652	+176.721	— 82.322	+ 89.380	+ 2.052	+0.322
1909 Febr. 6	+ 6.07	+1.9692	+200.902	— 59.503	+102.109	+ 1.962	+0.314
Mar. 18	+ 8.04	+2.2793	+224.745	— 29.408	+114.575	+ 1.702	+0.294
Apr. 27	+10.32	+2.5918	+248.235	+ 7.329	+126.713	+ 1.259	+0.263
June 6	+12.91	+2.9028	+271.354	+ 50.034	+138.470	+ 0.630	+0 224
July 16	+15.81	+3.2084	+294.086	+ 97.976	+149.802	— 0.182	+0.180
Aug. 25	+19.02	+3.5044	+316.422	+ 150 410	+160.677	— 1.164	+0.133
Oct. 4	+22.52	+3.7869	+338.350	+ 206.576	+171.076	— 2.296	+0.086
Nov. 13	+26.31	+4.0521	+359.864	+ 265.763	+180.990	— 3.549	+0.041
Dec. 23	+30.36	+4.2963	+380.959	+ 327.286	+190.420	— 4.888	+0.001
1910 Febr. 1	+34.66	+4.5158	+401.631	+ 390.497	+199.376	— 6.273	—0.033
Mar. 13	+39.18	+4.7070	+421.876	+ 454.789	+207.877	— 7.659	—0.063
Apr. 22	+43.88	+4.8664	+441.694	+ 519.606	+215.952	— 8.999	—0.082
June 1	+48.75	+4.9910	+461.085	+ 584.474	+223.638	—10.246	—0.093
July 11	+53.74	+5 0781	+480.054	+ 649.012	+230.972	—11.356	—0.097
Aug. 20	+58.82	+5.1250	+498.602	+ 712.920	+238.003	—12.287	—0.096
Sept. 29	+63.94	+5.1293	+516.734	+ 775.986	+244.776	—13.001	—0.091
Nov. 8	+69.07	+5.0888	+534.455	+ 838.074	+251.338	—13.468	—0.085
Dec. 18	+74.16	+5.0019	+551.768	+ 899.135	+257.737	—13.664	—0.081
1911 Jan. 27	+79.16	+4.8670	+568.681	+ 959.202	+264.021	—13.576	—0.083
Mar. 8	+84.03	+4.6829	+585.201	+1018.386	+270.233	—13.198	—0.094

Continued Table 3

Greenwich mean noon	μ		L_0	π	φ	Ω	i
	II_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f
		+ 4.″6829	+585.″201	+1018.″386	+270.233	—13.198	—0.094
1911 Apr. 17	+ 88.71						
		+ 4.4488	+601.335	+1076.870	+276.413	—12.535	—0.118
May 27	+ 93.16						
		+ 4.1640	+617.094	+1134.898	+282.597	—11.600	—0.158
July 6	+ 97 33						
		+ 3.8291	+632.485	+1192.826	+288.808	—10.420	—0.218
Aug. 15	+101.15						
		+ 3.4420	+647.506	+1250.857	+295.087	— 9.016	—0.301
Sept. 24	+104.60						
		+ 3.0040	+662.175	+1309.441	+301.441	— 7.432	—0.410
Nov. 3	+107.60						
		+ 2.5154	+676.498	+1368.985	+307.882	— 5.713	—0.547
Dec. 13	+110.12						
		+ 1.9771	+690.486	+1429.913	+314.413	— 3.907	—0.713
1912 Jan. 22	+112.09						
		+ 1.3898	+704.148	+1492.645	+321.029	— 2.068	—0.910
Mar. 2	+113.48						
		+ 0.7545	+717.495	+1557.598	+327.721	— 0.251	—1.137
Apr. 11	+114.24						
		+ 0.0725	+730.536	+1625.170	+334.470	+ 1 489	—1.395
May 21	+114.31						
		— 0.6549	+743.285	+1695.742	+341.252	+ 3.097	—1.688
June 30	+113.66						
		— 1.4261	+755.751	+1769.671	+348.037	+ 4.521	—2.002
Aug. 9	+112.23						
		— 2.2394	+767.949	+1847.286	+354.788	+ 5.714	—2.341
Sept. 18	+109.99						
		— 3.0932	+779.891	+1928.864	+361.466	+ 6.634	—2.701
Oct. 28	+106.90						
		— 3.9855	+791.590	+2014.644	+368.026	+ 7.246	—3.079
Dec. 7	+102.91						
		— 4.9146	+803.060	+2104.811	+374.418	+ 7.521	—3.471
1913 Jan. 16	+ 98.00						
		— 5.8786	+814.318	+2199.500	+380.592	+ 7.439	—3.873
Febr. 25	+ 92.12						
		— 6.8754	+825.379	+2298.789	+386.492	+ 6.990	—4.280
Apr. 6	+ 85.24						
		— 7.9031	+836.257	+2402.694	+392.062	+ 6.173	—4.688
May 16	+ 77.34						
		— 8.9597	+846.972	+2511.170	+397.249	+ 4.996	—5.091
June 25	+ 68.38						
		—10.0433	+857.542	+2624.118	+401.998	+ 3.478	—5.485
Aug. 4	+ 58.34						
		—11.1519	+867.985	+2741.390	+406.254	+ 1.645	—5.865
Sept. 13	+ 47.18						
		—12.2836	+878.320	+2862.796	+409.960	— 0.467	—6.228
Oct. 23	+ 34.90						
		—13.4365	+888.568	+2988.084	+413.063	— 2.814	—6.569
Dec. 2	+ 21.46						
		—14.6087	+898.749	+3116.946	+415.511	— 5.345	—6.885
1914 Jan. 11	+ 6.86						
		—15.7982	+908.887	+3249.022	+417.258	— 8.002	—7.173
Febr. 20	— 8.94						
		—17.0032	+919.002	+3383.899	+418.260	—10.722	—7.431
Apr. 1	— 25.95						
		—18.2218	+929.118	+3521.123	+418.476	—13.440	—7.658

Continued Table 3

Greenwich mean noon	μ II_f	μ I_f	L_0 I_f	π I_f	φ I_f	Ω I_f	i I_f
		—18.″2218	+ 929.″118	+3521.″123	+418.″476	—13.″440	— 7.″658
1914 May 11	— 44.′17						
		—19.4524	+ 939.258	+3660.193	+417.868	—16.086	— 7.853
June 20	— 63.62						
		—20.6930	+ 949.446	+3800.567	+416.402	—18.589	— 8.016
July 30	— 84.31						
		—21.9419	+ 959.707	+3941.682	+414.057	—20.885	— 8.147
Sept. 8	—106.26						
		—23.1973	+ 970.065	+4082.944	+410.811	—22.897	— 8.248
Oct. 18	—129.45						
		—24.4575	+ 980.544	+4223.731	+406.650	—24.564	— 8.321
Nov. 27	—153.91						
		—25.7208	+ 991.170	+4363.385	+401.561	—25.827	— 8.369
1915 Jan. 6	—179.63						
		—26.9855	+1001.966	+4501.223	+395.540	—26.632	— 8.395
Febr. 15	—206.62						
		—28.2498	+1012.958	+4636.545	+388.589	—26.932	— 8.403
Mar. 27	—234.87						
		—29.5120	+1024.171	+4768.653	+380.720	—26.689	— 8.398
May 6	—264.38						
		—30.7705	+1035.628	+4896.858	+371.954	—25.874	— 8.384
June 15	—295.15						
		—32.0236	+1047.351	+5020.466	+362.316	—24.467	— 8.365
July 25	—327.17						
		—33.2697	+1059.362	+5138.794	+351.837	—22.459	— 8.347
Sept. 3	—360.44						
		—34.5070	+1071.685	+5251.150	+340.555	—19.851	— 8.335
Oct. 13	—394.95						
		—35.7340	+1084.340	+5356.891	+328.517	—16.655	— 8.334
Nov. 22	—430.68						
		—36.9490	+1097.346	+5455.395	+315.777	—12.894	— 8.349
1916 Jan. 1	—467 63						
		—38.1505	+1110.721	+5546.077	+302.397	— 8.600	— 8.384
Febr. 10	—505.78						
		—39.3371	+1124.481	+5628.376	+288.438	— 3.815	— 8.443
Mar. 21	—545.12						
		—40.5071	+1138.642	+5701.760	+273.974	+ 1.411	— 8.529
Apr. 30	—585.63						
		—41.6590	+1153.218	+5765.768	+259.082	+ 7.020	— 8.645
June 9	—627.29						
		—42.7913	+1168.222	+5820.008	+243.845	+12.948	— 8.794
July 19	—670.08						
		—43.9026	+1183.663	+5864.185	+228.351	+19.127	— 8.976
Aug. 28	—713.98						
		—44.9916	+1199.549	+5898.045	+212.690	+25.484	— 9.193
Oct. 7	—758.97						
		—46.0571	+1215.887	+5921.392	+196.955	+31.945	— 9.444
Nov. 16	—805.03						
		—47.0977	+1232.681	+5934.084	+181.240	+38.436	— 9.728
Dec. 26	—852.13						
		—48.1121	+1249.935	+5936.070	+165.643	+44.883	—10.043
1917 Febr. 4	—900.24						
		—49.0993	+1267.650	+5927.394	+150.261	+51.216	—10.387
Mar. 16	—949.34						
		—50.0581	+1285.825	+5908.196	+135.191	+57.368	—10.757
Apr. 25	—999.40						
		—50.9874	+1304.456	+5878.683	+120.528	+63.278	—11.150

Continued Table 3

Greenwich mean noon	μ II_f	μ I_f	L_0 I_f	π I_f	φ I_f	Ω I_f	i I_f
		—50″.9874	+1304″.456	+5878.683	+120″.528	+ 63″.278	—11″.150
1917 June 4	—1050″.38	—51.8863	+1323.540	+5839.139	+106.366	+ 68.891	—11.561
July 14	—1102.27	—52.7538	+1343.069	+5789.924	+ 92.797	+ 74.161	—11.985
Aug. 23	—1155.02	—53.5891	+1363.037	+5731.484	+ 79.908	+ 79.048	—12.418
Oct. 2	—1208.61	—54.3912	+1383.434	+5664.347	+ 67.782	+ 83.522	—12.854
Nov. 11	—1263.00	—55.1594	+1404.248	+5589.103	+ 56.497	+ 87.562	—13.288
Dec. 21	—1318.16	—55.8932	+1425.466	+5506.401	+ 46.123	+ 91.158	—13.716
1918 Jan. 30	—1374.06	—56.5917	+1447.074	+5416.948	+ 36.729	+ 94.307	—14.128
Mar. 11	—1430.65	—57.2544	+1469.055	+5321.526	+ 28.373	+ 97.015	—14.527
Apr. 20	—1487.90	—57.8809	+1491.394	+5220.972	+ 21.105	+ 99.298	—14.905
May 30	—1545.78	—58.4705	+1514.072	+5116.161	+ 14.969	+101.178	—15.259
July 9	—1604.25	—59.0230	+1537.070	+5007.990	+ 9.996	+102.685	—15.585
Aug. 18	—1663.28	—59.5380	+1560.367	+4897.377	+ 6.213	+103.853	—15.880
Sept. 27	—1722.81	—60.0153	+1583.939	+4785.252	+ 3.635	+104.722	—16.143
Nov. 6	—1782.83	—60.4547	+1607.763	+4672.562	+ 2.270	+105.334	—16.372
Dec. 16	—1843.28	—60.8563	+1631.815	+4560.260	+ 2.112	+105.733	—16.567
1919 Jan. 25	—1904.14	—61.2201	+1656.070	+4449.287	+ 3.149	+105.963	—16.728
Mar. 6	—1965.36	—61.5463	+1680.502	+4340.566	+ 5.359	+106.067	—16.857
Apr. 15	—2026.91	—61.8350	+1705.084	+4234.996	+ 8.709	+106.086	—16.955
May 25	—2088.74	—62 0868	+1729.787	+4133.432	+ 13.157	+106.057	—17.024
July 4	—2150.83						

lines (2) contain the perturbations caused by Mercur + Venus; the lines (3) contain the perturbations caused by the Earth + Mars + Jupiter + Saturn + Uranus + Neptune. The lines (1) contain the undisturbed mean longitude of Nestor. The lines (4) give the osculating elements of Nestor for the moments t of the normal places.

3. With these osculating elements (T. 7) I have calculated the coordinates α_{cal}, δ_{cal} (the right ascension, the declination) and ρ (the geo-

Table 4

Summation of perturbations by Saturn

Greenwich mean noon	μ		L_0	π	φ	Ω	i
	II_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f
1908 Mar. 23		—0″.0002	— 0″.001	— 0″.006	0″.000	+ 0″.001	0″.000
May 2	+ 0″.00	+0.0286	— 1.231	+ 5.281	— 0.323	— 0.202	—0.042
June 11	+ 0.03	+0.0612	— 2.443	+ 10.708	— 0.648	— 0.440	—0.085
July 21	+ 0.09	+0.0978	— 3.637	+ 16.286	— 0.978	— 0.715	—0.128
Aug. 30	+ 0.19	+0.1384	— 4.808	+ 22.019	— 1.313	— 1.028	—0.171
Oct. 9	+ 0.33	+0.1829	— 5.956	+ 27.912	— 1.658	— 1.379	—0.214
Nov. 18	+ 0.51	+0.2313	— 7.077	+ 33.965	— 2.013	— 1.768	—0.256
Dec. 28	+ 0.74	+0.2836	— 8.169	+ 40.179	— 2.381	— 2.195	—0.298
1909 Febr. 6	+ 1.02	+0.3399	— 9.230	+ 46.550	— 2.764	— 2.660	—0.338
Mar. 18	+ 1.36	+0.4000	—10.258	+ 53.072	— 3.164	— 3.162	—0.377
Apr. 27	+ 1.76	+0.4640	—11.250	+ 59.739	— 3.584	— 3.700	—0.414
June 6	+ 2.23	+0.5318	—12.203	+ 66.541	— 4.026	— 4.273	—0.449
July 16	+ 2.76	+0.6033	—13.115	+ 73.465	— 4.492	— 4.879	—0.482
Aug. 25	+ 3.36	+0.6785	—13.983	+ 80.494	— 4.984	— 5.516	—0.513
Oct. 4	+ 4.04	+0.7572	—14.805	+ 87.612	— 5.504	— 6.181	—0 541
Nov. 13	+ 4.80	+0.8393	—15.578	+ 94.798	— 6.053	— 6.872	—0.566
Dec. 23	+ 5.64	+0.9247	—16.300	+102.029	— 6.633	— 7.585	—0.587
1910 Febr. 1	+ 6.56	+1.0132	—16.968	+109.277	— 7.244	— 8.316	—0 605
Mar. 13	+ 7.58	+1.1046	—17.581	+116.514	— 7.888	— 9.062	—0.619
Apr. 22	+ 8.[illegible]	+1.1986	—18.135	+123.711	— 8.565	— 9.818	—0.630
June 1	+ 9.88	+1.2951	—18.628	+130.837	— 9.274	—10.580	—0.637
July 11	+11.18	+1.3937	—19.059	+137.861	—10.014	—11.343	—0.640
Aug. 20	+12.57	+1.4941	—19.426	+144.752	—10.784	—12.102	—0.639
Sept. 29	+14.06	+1.5959	—19.726	+151.477	—11.581	—12.852	—0.634
Nov. 8	+15.66	+1.6988	—19.958	+158.006	—12.404	—13.587	—0.625
Dec. 18	+17.36	+1.8024	—20.120	+164.312	—13.250	—14.303	—0.612
1911 Jan. 27	+19.16	+1.9061	—20.210	+170.368	—14.114	—14.994	—0.596
Mar. 8	+21.07	+2.0094	—20.227	+176.152	—14.992	—15.656	—0.576

Continued Table 4

Greenwich mean noon	μ Π_f	μ I_f	L_0 I_f	π I_f	φ I_f	Ω I_f	i I_f
		+2″.0094	—20″.227	+176″.152	—14″.992	—15″.656	—0″.576
1911 Apr. 17	+23″.08	+2.1117	—20.171	+181.646	—15.878	—16.283	—0.553
May 27	+25.19	+2.2125	—20.040	+186.840	—16.767	—16.871	—0.528
July 6	+27.40	+2.3112	—19.833	+191.730	—17.652	—17.416	—0.500
Aug. 15	+29.71	+2.4071	—19.551	+196.321	—18.527	—17.915	—0.470
Sept. 24	+32.12	+2.4995	—19.192	+200.627	—19.385	—18.363	—0.439
Nov. 3	+34.62	+2.5876	—18.757	+204.670	—20.218	—18.761	—0.407
Dec. 13	+37.20	+2.6708	—18.248	+208.479	—21.019	—19.105	—0.375
1912 Jan. 22	+39.88	+2.7482	—17.665	+212.098	—21.781	—19.396	—0.344
Mar. 2	+42.62	+2.8190	—17.010	+215.582	—22.495	—19.634	—0.314
Apr. 11	+45.44	+2.8823	—16.284	+218.995	—23.156	—19.821	—0.286
May 21	+48.33	+2.9373	—15.489	+222.415	—23.756	—19.960	—0.261
June 30	+51.26	+2.9831	—14.629	+225.927	—24.288	—20.055	—0.240
Aug. 9	+54.25	+3.0188	—13.707	+229.630	—24.748	—20.113	—0.224
Sept. 18	+57.26	+3.0436	—12.729	+233.631	—25.131	—20.141	—0.213
Oct. 28	+60.31	+3.0566	—11.698	+238.046	—25.433	—20.148	—0.208
Dec. 7	+63.36	+3.0568	—10.620	+242.999	—25.652	—20.146	—0.211
1913 Jan. 16	+66.42	+3.0434	— 9.502	+248.623	—25.788	—20.148	—0.221
Febr. 25	+69.46	+3.0154	— 8.350	+255.056	—25.839	—20.169	—0.240
Apr. 6	+72.48	+2.9721	— 7.174	+262.437	—25.808	—20.226	—0.269
May 16	+75.45	+2.9125	— 5.982	+270.912	—25.697	—20.339	—0.308
June 25	+78.36	+2.8358	— 4.785	+280.627	—25.510	—20.529	—0.357
Aug. 4	+81.20	+2.7411	— 3.594	+291.733	—25.252	—20.819	—0.417
Sept. 13	+83.94	+2.6274	— 2.422	+304.388	—24.930	—21.236	—0.489
Oct. 23	+86.57	+2.4940	— 1.283	+318.733	—24.553	—21.808	—0.572
Dec. 2	+89.06	+2.3403	— 0.193	+334.904	—24.131	—22.565	—0.667
1914 Jan. 11	+91.40	+2.1654	+ 0 829	+353.044	—23.673	—23.541	—0.773
Feb. 20	+93.57	+1.9685	+ 1.765	+373.287	—23.192	—24.769	—0.890
Apr. 1	+95.54	+1.7490	+ 2.593	+395.762	—22.700	—26.287	—1.017

Continued Table 4

Greenwich mean noon	μ		L_0	π	φ	Ω	i
	II_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f
		+1.″7490	+ 2.″593	+ 395.″762	—22.″700	— 26.″287	—1.017
1914 May 11	+ 97.″29						
		+1.5062	+ 3.290	+ 420.587	—22.211	— 28.134	—1.153
June 20	+ 98.79						
		+1.2395	+ 3.829	+ 447.878	—21.739	— 30.351	—1.297
July 30	+100.03						
		+0.9485	+ 4.183	+ 477.720	—21.297	— 32.984	—1.448
Sept. 8	+100.98						
		+0.6329	+ 4.319	+ 510.208	—20.901	— 36.066	—1.603
Oct. 18	+101.61						
		+0.2923	+ 4.205	+ 545.408	—20.535	— 39.646	—1.760
Nov. 27	+101.91						
		—0.0732	+ 3.803	+ 583.373	—20.274	— 43.768	—1.917
1915 Jan. 6	+101.83						
		—0.4635	+ 3.073	+ 624.142	—20.102	— 48.475	—2.070
Feb. 15	+101.37						
		—0.8783	+ 1.973	+ 667.722	—20.032	— 53.808	—2.216
Mar. 27	+100.49						
		—1.3170	+ 0.456	+ 714.113	—20.075	— 59.809	—2.350
May 6	+ 99.17						
		—1.7783	— 1.526	+ 763.253	—20.237	— 66.509	—2.469
June 15	+ 97.40						
		—2.2610	— 4.024	+ 815.091	—20.524	— 73.941	—2.567
July 25	+ 95.13						
		—2.7632	— 7.091	+ 869.529	—20.938	— 82.127	—2.639
Sept. 3	+ 92.37						
		—3.2823	— 10.781	+ 926.425	—21.477	— 91.082	—2.679
Oct. 13	+ 89.09						
		—3.8154	— 15.147	+ 985.619	—22.132	—100.809	—2.681
Nov. 22	+ 85.27						
		—4.3588	— 20.243	+1046.902	—22.890	—111.298	—2.639
1916 Jan. 1	+ 80.91						
		—4.9080	— 26.118	+1110.030	—23.727	—122.523	—2.548
Febr. 10	+ 76.01						
		—5.4577	— 32.817	+1174.709	—24.615	—134.442	—2.401
Mar. 21	+ 70.55						
		—6.0020	— 40.375	+1240.628	—25.520	—146.994	—2.194
Apr. 30	+ 64.55						
		—6.5340	— 48.817	+1307.436	—26.398	—160.093	—1.922
June 9	+ 58.01						
		—7.0467	— 58.157	+1374.787	—27.196	—173.642	—1.582
July 19	+ 50.97						
		—7.5319	— 68.389	+1442.310	—27.854	—187.513	—1.173
Aug. 28	+ 43.43						
		—7.9818	— 79.498	+1509.681	—28.308	—201.574	—0.694
Oct. 7	+ 35.45						
		—8.3877	— 91.434	+1576.520	—28.491	—215.662	—0.147
Nov. 16	+ 27.06						
		—8.7416	—104.129	+1642.502	—28.339	—229.607	+0.463
Dec. 26	+ 18.32						
		—9.0363	—117.497	+1707.376	—27.788	—243.242	+1.130
1917 Febr. 4	+ 9.29						
		—9.2654	—131.420	+1770.925	—26.785	—256.395	+1.845
Mar. 16	+ 0.02						
		—9.4234	—145.768	+1832.966	—25.283	—268.904	+2.598
Apr. 25	— 9.40						
		—9.5068	—160.402	+1893.457	—23.248	—280.636	+3.378

Continued Table 4

Greenwich mean noon	μ		L_0	π	φ	Ω	i
	II_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f
		—9.5068	—160.402	+1893.457	—23.248	—280.636	+ 3.378
1917 June 4	— 18.91	—9.5136	—175.157	+1952.338	—20.667	—291.467	+ 4.170
July 14	— 28.42	—9.4438	—189.881	+2009.686	—17.538	—301.315	+ 4.963
Aug. 23	— 37.87	—9.2997	—204.410	+2065.572	—13.885	—310.117	+ 5.743
Oct. 2	— 47.17	—9.0848	—218.595	+2120.117	— 9.741	—317.852	+ 6.497
Nov. 11	— 56.25	—8.8042	—232.308	+2173.494	— 5.154	—324.534	+ 7.216
Dec. 21	— 65.05	—8.4645	—245.428	+2225.840	— 0.188	—330.196	+ 7.889
1918 Jan. 30	— 73.52	—8.0729	—257.861	+2277.311	+ 5.086	—334.902	+ 8.510
Mar. 11	— 81.59	—7.6370	—269.534	+2328.038	+10.596	—338.732	+ 9.074
Apr. 20	— 89.23	—7.1652	—280.388	+2378.074	+16.261	—341.775	+ 9.578
May 30	— 96.39	—6.6653	—290.394	+2427.490	+22.010	—344.132	+10.021
July 9	—103.06	—6.1447	—299.544	+2476.384	+27.775	—345.904	+10.404
Aug. 18	—109.20	—5.6107	—307.836	+2524.588	+33.488	—347.189	+10.729
Sept. 27	—114.81	—5.0697	—315.289	+2572.231	+39.091	—348.080	+10.999
Nov. 6	—119.88	—4.5272	—321.934	+2619.230	+44.539	—348.663	+11.217
Dec. 16	—124.41	—3.9883	—327.805	+2665.502	+49.790	—349.014	+11.389
1919 Jan. 25	—128.40	—3.4570	—332.945	+2710.962	+54.810	—349.199	+11.519
Mar. 6	—131.86	—2.9372	—337.398	+2755.512	+59.576	—349.274	+11.612
Apr. 15	—134.79	—2.4315	—341.216	+2799.068	+64.069	—349.286	+11.673
May 25	—137.23	—1.9425	—344.446	+2841.510	+68.277	—349.272	+11.706
July 4	—139.17						

centric distance of Nestor); the corresponding results are given in the columns 6, 7, 8 of Table 8. The columns 4, 5 contain the observed values α_{obs}, δ_{obs} (the normal places from Kristensen's Table on the page 8 of «Publikationer...», № 37). The columns 9, 10, 11 contain the differences $O - C$ of the coordinates and the corresponding weights.

4. Using the values $\lg(\cos\delta \cdot d\alpha)$,[1] $\lg(d\delta)$ from Table 8 I have formed by the Bauschinger's formulae («Die Bahnbestimmung...», pp. 442—443)

[1] $\lg(\cos\delta d\alpha) = \lg\cos\delta_{obs} \cdot (\alpha_{obs} - \alpha_{cal})$.

Table 5

Summation of perturbations by Uranus

Greenwich mean noon	μ II_f	μ I_f	L_0 I_f	π I_f	φ I_f	Ω I_f	i I_f
1908 Mar. 23		0″.0000	0″.000	+0″.001	0″.000	0″.000	0″.000
May 2	0″.00	+0.0008	+0.018	+0.035	+0.013	+0.002	0.000
June 11	0.00	+0.0014	+0.037	+0.055	+0.025	+0.004	0.000
July 21	0.00	+0.0017	+0.057	+0.059	+0.036	+0.005	0.000
Aug. 30	0.00	+0.0018	+0.077	+0.047	+0.047	+0.006	0.000
Oct. 9	+0.01	+0.0017	+0.098	+0.016	+0.056	+0.006	0.000
Nov. 18	+0.01	+0.0014	+0.119	−0.035	+0.064	+0.006	0.000
Dec. 28	+0.01	+0.0008	+0.140	−0.103	+0.073	+0.005	0.000
1909 Febr. 6	+0.01	0.0000	+0.160	−0.204	+0.081	+0.003	0.000
Mar. 18	+0.01	−0.0011	+0.179	−0.321	+0.088	0.000	0.000
Apr. 27	+0.01	−0.0025	+0.196	−0.462	+0.095	−0.004	0.000
June 6	+0.01	−0.0042	+0.212	−0.629	+0.102	−0.010	0.000
July 16	+0.00	−0.0060	+0.226	−0.819	+0.110	−0.017	0.000
Aug. 25	0.00	−0.0081	+0.238	−1.034	+0.118	−0.026	0.000
Oct. 4	−0.01	−0.0105	+0.248	−1.269	+0.126	−0.036	0.000
Nov. 13	−0.02	−0.0132	+0.254	−1.527	+0.135	−0.048	0.000
Dec. 23	−0.04	−0.0160	+0.256	−1.804	+0.144	−0.062	0.000
1910 Febr. 1	−0.05	−0.0190	+0.255	−2.097	+0.153	−0.077	0.000
Mar. 13	−0.07	−0.0222	+0.250	−2.404	+0.163	−0.094	0.000
Apr. 22	−0.09	−0.0254	+0.241	−2.723	+0.173	−0.113	0.000
June 1	−0.12	−0.0287	+0.227	−3.050	+0.184	−0.133	0.000
July 11	−0.15	−0.0320	+0.209	−3.380	+0.195	−0.155	0.000
Aug. 20	−0.18	−0.0352	+0.186	−3.710	+0.206	−0.178	0.000
Sept. 29	−0.21	−0.0383	+0.159	−4.038	+0.217	−0.202	0.000
Nov. 8	−0.25	−0.0412	+0.128	−4.359	+0.227	−0.227	0.000
Dec. 18	−0.29	−0.0437	+0.093	−4.670	+0.235	−0.252	0.000
1911 Jan. 27	−0.34	−0.0459	+0.054	−4.968	+0.241	−0.278	+0.001
Mar. 8	−0.38	−0.0477	+0.012	−5.252	+0.245	−0.303	+0.002

Continued Table 5.

Greenwich mean noon	μ		L_0	π	φ	Ω	i
	Π_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f
		−0″.0477	−0″.012	−5″.252	+0″.245	−0″.303	+0″.002
1911 Apr. 17	−0″.43	−0.0491	−0.033	−5.520	+0.247	−0.328	+0.003
May 27	−0.48	−0.0501	−0.079	−5.772	+0.245	−0.352	+0.004
July 6	−0.53	−0.0506	−0.126	−6.009	+0.240	−0.375	+0.005
Aug. 15	−0.58	−0.0505	−0.173	−6.231	+0.231	−0.397	+0.006
Sept. 24	−0.63	−0.0499	−0.220	−6.440	+0.219	−0.417	+0.007
Nov. 3	−0.68	−0.0488	−0.265	−6.638	+0.203	−0.435	+0.008
Dec. 13	−0.73	−0.0472	−0.308	−6.827	+0.184	−0.451	+0.010
1912 Jan. 22	−0.78	−0.0452	−0.348	−7.008	+0.162	−0.465	+0.012
Mar. 2	−0.82	−0.0428	−0.385	−7.185	+0.137	−0.477	+0.014
Apr. 11	−0.87	−0.0401	−0.418	−7.359	+0.110	−0.487	+0.016
May 21	−0.91	−0.0371	−0.446	−7.530	+0.082	−0.495	+0.017
June 30	−0.94	−0.0339	−0.470	−7.698	+0.052	−0.501	+0.018
Aug. 9	−0.98	−0.0306	−0.489	−7.864	+0.023	−0.506	+0.019
Sept. 18	−1.01	−0.0273	−0.504	−8.027	−0.007	−0.509	+0.020
Oct. 28	−1.03	−0.0240	−0.515	−8.186	−0.036	−0.511	+0.021
Dec. 7	−1.06	−0.0209	−0.521	−8.340	−0.064	−0.512	+0.022
1913 Jan. 16	−1.08	−0.0179	−0.523	−8.485	−0.091	−0.512	+0.023
Febr. 25	−1.10	−0.0151	−0.521	−8.620	−0.116	−0.511	+0.024
Apr. 6	−1.11	−0.0126	−0.516	−8.744	−0.139	−0.510	+0.025
May 16	−1.12	−0.0103	−0.508	−8.854	−0.160	−0.508	+0.026
June 25	−1.14	−0.0083	−0.498	−8.949	−0.178	−0.506	+0.026
Aug. 4	−1.14	−0.0066	−0.486	−9.026	−0.194	−0.504	+0.026
Sept. 13	−1.15	−0.0052	−0.472	−9.085	−0.208	−0.502	+0.026
Oct. 23	−1.16	−0.0041	−0.456	−9.125	−0.221	−0.501	+0.026
Dec. 2	−1.16	−0.0034	−0.439	−9.144	−0.233	−0.500	+0.026
1914 Jan. 11	−1.16	−0.0028	−0.422	−9.142	−0.243	−0.499	+0.026
Febr. 20	−1.17	−0.0025	−0.405	−9.121	−0.251	−0.499	+0.026
Apr. 1	−1.17	−0.0025	−0.388	−9.080	−0.258	−0.499	+0.026

Continued Table 5

Greenwich mean noon	μ		L_0	π	φ	Ω	i
	II_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f
		—0″.0025	—0″.388	—9″.080	—0″.258	—0″.499	+0″.026
1914 May 11	—1.17						
		—0.0028	—0.372	—9.018	—0.265	—0.500	+0.026
June 20	—1.17						
		—0.0033	—0.356	—8.938	—0.271	—0.501	+0.026
July 30	—1.18						
		—0.0041	—0.340	—8.840	—0.276	—0.503	+0.026
Sept. 8	—1.18						
		—0.0051	—0.326	—8.727	—0.282	—0.506	+0.026
Oct. 18	—1.19						
		—0.0062	—0.313	—8.598	—0.287	—0.509	+0.026
Nov. 27	—1.19						
		—0.0075	—0.302	—8.456	—0.292	—0.513	+0.026
1915 Jan. 6	—1.20						
		—0.0089	—0.292	—8.302	—0.297	—0.517	+0.026
Febr. 15	—1.21						
		—0.0104	—0.284	—8.139	—0.303	—0.521	+0.026
Mar. 27	—1.22						
		—0.0121	—0.278	—7.966	—0.310	—0.526	+0.026
May 6	—1.23						
		—0.0139	—0.274	—7.785	—0.317	—0.531	+0.026
June 15	—1.24						
		—0.0157	—0.272	—7.598	—0.324	—0.537	+0.026
July 25	—1.26						
		—0.0176	—0.271	—7.407	—0.331	—0.543	+0.026
Sept. 3	—1.28						
		—0.0195	—0.272	—7.214	—0.339	—0.549	+0.026
Oct. 13	—1.30						
		—0.0214	—0.275	—7.018	—0.347	—0.555	+0.026
Nov. 22	—1.32						
		—0.0233	—0.280	—6.821	—0.355	—0.561	+0.026
1916 Jan. 1	—1.34						
		—0.0253	—0.287	—6.624	—0.364	—0.568	+0.026
Febr. 10	—1.37						
		—0.0272	—0.296	—6.429	—0.373	—0.575	+0.026
Mar. 21	—1.40						
		—0.0291	—0.307	—6.236	—0.383	—0.582	+0.026
Apr. 30	—1.42						
		—0.0309	—0.320	—6.047	—0.392	—0.589	+0.026
June 9	—1.46						
		—0.0327	—0.334	—5.860	—0.401	—0.596	+0.026
July 19	—1.49						
		—0.0344	—0.350	—5.678	—0.411	—0.603	+0.026
Aug. 28	—1.52						
		—0.0360	—0.368	—5.500	—0.421	—0.609	+0.026
Oct. 7	—1.56						
		—0.0376	—0.387	—5.326	—0.431	—0.615	+0.026
Nov. 16	—1.60						
		—0.0391	—0.407	—5.157	—0.440	—0.621	+0.026
Dec. 26	—1.63						
		—0.0405	—0.430	—4.993	—0.449	—0.627	+0.026
1917 Febr. 4	—1.68						
		—0.0418	—0.454	—4.833	—0.457	—0.633	+0.026
Mar. 16	—1.72						
		—0.0430	—0.479	—4.679	—0.465	—0.638	+0.026
Apr. 25	—1.76						
		—0.0441	—0.505	—4.529	—0.473	—0.643	+0.026

Continued Table 5

Greenwich mean noon	μ		L_0	π	φ	Ω	i
	II_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f
		—0″.0441	—0″.505	—4″.529	—0″.473	—0″.643	+0″.026
1917 June 4	—1″.80						
		—0.0451	—0.532	—4.384	—0.480	—0.648	+0.026
July 14	—1.85						
		—0.0460	—0.560	—4.242	—0.486	—0.653	+0.026
Aug. 23	—1.90						
		—0.0468	—0.588	—4.103	—0.491	—0.657	+0.026
Oct. 2	—1.94						
		—0.0474	—0.617	—3.967	—0.496	—0.661	+0.026
Nov. 11	—1.99						
		—0.0479	—0.647	—3.833	—0.500	—0.665	+0.026
Dec. 21	—2.04						
		—0.0482	—0.677	—3.701	—0.503	—0.668	+0.026
1918 Jan. 30	—2.09						
		—0.0484	—0.707	—3.571	—0.505	—0.671	+0.026
Mar. 11	—2.13						
		—0.0485	—0.737	—3.440	—0.506	—0.674	+0.026
Apr. 20	—2.18						
		—0.0485	—0.767	—3.310	—0.507	—0.676	+0.026
May 30	—2.23						
		—0.0484	—0.797	—3.178	—0.506	—0.678	+0.026
July 9	—2.28						
		—0.0482	—0.827	—3.045	—0.505	—0.680	+0.026
Aug. 18	—2.33						
		—0.0477	—0.857	—2.910	—0.504	—0.682	+0.026
Sept. 27	—2.38						
		—0.0471	—0.886	—2.773	—0.501	—0.683	+0.026
Nov. 6	—2.42						
		—0.0464	—0.915	—2.633	—0.498	—0.684	+0.026
Dec. 16	—2.47						
		—0.0456	—0.943	—2.489	—0.494	—0.685	+0.026
1919 Jan. 25	—2.51						
		—0.0447	—0.970	—2.342	—0.490	—0.685	+0.026
Mar. 6	—2.56						
		—0.0437	—0.996	—2.190	—0.485	—0.685	+0.026
Apr. 15	—2.60						
		—0.0426	—1.022	—2.033	—0.479	—0.685	+0.026
May 25	—2.65						
		—0.0414	—1.046	—1.872	—0.478	—0.685	+0.026
July 4	—2.69						

the equations of condition to determine the corrections dL_0, $d\pi$, $d\Omega$, di, $d\varphi$, $d\mu$ for the elements (IV). These equations have a following form:

$$a dM_0 + b d\mu + c d\varphi + \partial ds + e dp + f dq = \cos\delta d\alpha \text{ or } d\delta; \qquad (1)$$

where the unknowns are dM_0, $d\mu$, $d\varphi$, ds, dp, dq and

$$dM_0 = dL_0 - d\pi, \quad ds = d\Omega + d\omega - \operatorname{tg}\frac{1}{2} i \cdot \sin i d\Omega,$$

$$dp = \cos\omega di + \sin\omega \sin i d\Omega, \quad dq = -\sin\omega di + \cos\omega \sin i d\Omega, \qquad (2)$$

$$\omega = \pi - \Omega.$$

Table 6

Summation of perturbations by Neptune

Greenwich mean noon	μ II_f	μ I_f	L_0 I_f	π I_f	φ I_f	Ω I_f	i I_f
1908 Mar. 23		0″0000	0″000	0″000	0″000	0″000	0″000
May 2	0.00	—0.0001	+0.007	—0.025	+0.003	0.000	0.000
June 11	0.00	—0.0002	+0.014	—0.055	+0.005	0.000	0.000
July 21	0.00	—0.0004	+0.020	—0.090	+0.007	—0.001	0.000
Aug. 30	0.00	—0.0007	+0.026	—0.129	+0.009	—0.002	0.000
Oct. 9	0.00	—0.0010	+0.032	—0.174	+0.009	—0.003	0.000
Nov. 18	0.00	—0.0014	+0.037	—0.224	+0.009	—0.005	0.000
Dec. 28	0.00	—0.0019	+0.041	—0.279	+0.009	—0.007	0.000
1909 Febr. 6	—0.01	—0.0024	+0.045	—0.337	+0.010	—0.009	0.000
Mar. 18	—0.01	—0.0030	+0.048	—0.399	+0.010	—0.012	0.000
Apr. 27	—0.01	—0.0036	+0.050	—0.465	+0.010	—0.015	0.000
June 6	—0.01	—0.0042	+0.052	—0.534	+0.010	—0.018	0.000
July 16	—0.02	—0.0049	+0.053	—0.604	+0.010	—0.022	0.000
Aug. 25	—0.02	—0.0056	+0.053	—0.676	+0.010	—0.026	0.000
Oct. 4	—0.03	—0.0063	+0.052	—0.749	+0.011	—0.030	0.000
Nov. 13	—0.04	—0.0070	+0.050	—0.823	+0.011	—0.035	0.000
Dec. 23	—0.04	—0.0077	+0.048	—0.896	+0.012	—0.040	0.000
1910 Febr. 1	—0.05	—0.0084	+0.045	—0.968	+0.012	—0.045	0.000
Mar. 13	—0.06	—0.0091	+0.041	—1.039	+0.013	—0.050	0.000
Apr. 22	—0.07	—0.0098	+0.036	—1.108	+0.014	—0.056	0.000
June 1	—0.08	—0.0104	+0.031	—1.176	+0.014	—0.062	0.000
July 11	—0.09	—0.0109	+0.025	—1.240	+0.014	—0.068	0.000
Aug. 20	—0.10	—0.0113	+0.018	—1.302	+0.014	—0.074	0.000
Sept. 29	—0.11	—0.0117	+0.011	—1.360	+0.014	—0.080	0.000
Nov. 8	—0.12	—0.0120	+0.003	—1.415	+0.014	—0.086	0.000
Dec. 18	—0.13	—0.0123	—0.005	—1.467	+0.014	—0.092	0.000
1911 Jan. 27	—0.15	—0.0125	—0.013	—1.515	+0.013	—0.098	0.000
Mar. 8	—0.16	—0.0126	—0.021	—1.560	+0.012	—0.104	0.000

Continued Table 6

Greenwich mean noon	μ II_f	μ I_f	L_0 I_f	π I_f	φ I_f	Ω I_f	i I_f
		—0″.0126	—0″.021	—1″.560	+0″.012	—0″.104	0″.000
1911 Apr. 17	—0″.17	—0.0127	—0.030	—1.602	+0.010	—0.109	0.000
May 27	—0.18	—0.0128	—0.039	—1.641	+0.008	—0.114	0.000
July 6	—9.20	—0.0128	—0.048	—1.678	+0.006	—0.119	0.000
Aug. 15	—0.21	—0.0127	—0.056	—1.713	+0.003	—0.124	0.000
Sept. 24	—0.22	—0.0125	—0.064	—1.746	0.000	—0.128	0.000
Nov. 3	—0.23	—0.0122	—0.072	—1.777	—0.004	—0.132	0.000
Dec. 13	—0.25	—0.0118	—0.080	—1.808	—0.009	—0.136	0.000
1912 Jan. 22	—0.26	—0.0114	—0.087	—1.839	—0.013	—0.139	0.000
Mar. 2	—0.27	—0.0109	—0.094	—1.871	—0.018	—0.142	0.000
Apr. 11	—0.28	—0.0103	—0.100	—1.903	—0.024	—0.144	0.000
May 21	—0.29	—0.0097	—0.105	—1.935	—0.030	—0.146	0.000
June 30	—0.30	—0.0090	—0.110	—1.968	—0.037	—0.148	0.000
Aug. 9	—0 31	—0.0083	—0.114	—2.002	—0.043	—0.149	0.000
Sept. 18	—0.32	—0.0076	—0.117	—2.036	—0.050	—0.150	0.000
Oct. 28	—0·33	—0.0069	—0.119	—2.071	—0.057	—0.151	0.000
Dec. 7	—0.33	—0.0062	—0.120	—2 107	—0.064	—0.151	0.000
1913 Jan. 16	—0.34	—0.0055	—0.120	—2.142	—0.070	—0.151	0.000
Febr. 25	—0.34	—0.0048	—0.120	—2.176	—0.076	—0.151	0.000
Apr. 6	—0.35	—0.0042	—0.119	—2.208	—0.081	—0.151	0.000
May 16	—0.35	—0 0036	—0.117	—2.239	—0.087	—0.150	0.000
June 25	—0.36	—0.0031	—0.114	—2.267	—0.092	—0.149	0.000
Aug. 4	— 0 36	—0.0026	—0.110	—2.291	—0.096	—0.148	0.000
Sept. 13	—0.36	—0.0022	—0.109	—2.311	—0.101	—9.147	0.000
Oct. 23	—0.37	—0.0019	—0.101	—2.325	—0.105	—0.146	0.000
Dec. 2	—0.37	—0.0017	—0.096	—2.334	—0.108	—0.146	0.000
1914 Jan. 11	—0.37	—0.0015	—0.091	—2.337	—0.112	—0.146	0.000
Febr. 20	—0.37	—0.0013	—0.085	—2.332	—0.115	—0.146	0.000
Apr. 1	—0.37	—0.0012	—0.079	—2.321	—0.118	—0.146	0.000

Continued Table 6

Greenwich mean noon	μ		L_0	π	φ	Ω	i
	II_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f
		—0″.0012	—0″.079	—2.321	—0″.118	—0″.146	0″.000
1914 May 11	—0″.37	—0.0012	—0.073	—2.301	—0.121	—0.146	0.000
June 20	—0 37	—0.0013	—0.067	—2.273	—0.123	—0.147	0.000
July 30	—0.38	—0.0015	—0.061	—2.236	—0.125	—0.148	0.000
Sept. 8	—0.38	—0.0018	—0.056	—2.191	—0.127	—0.150	0.000
Oct. 18	—0.38	—0.0023	—0.051	—2.137	—0.130	—0.152	0.000
Nov. 27	—0.38	—0.0029	—0.047	—2.074	—0.132	—0.155	0.000
1915 Jan. 6	—0.38	—0.0036	—0.043	—2.003	—0 135	—0.159	0.000
Febr. 15	—0.39	—0.0044	—0.040	—1.924	—0.137	—0.163	0.000
Mar. 27	—0.39	—0.0052	—0.037	—1.839	—0.140	—0.168	0.000
May 6	—0.40	—0.0061	—0.035	—1.747	—0.142	—0.174	0.000
June 15	—0.40	—0.0070	—0.034	—1.649	—0.145	—0.180	0.000
July 25	—0.41	—0.0080	—0.035	—1.545	—0 148	—0.187	0.000
Sept. 3	—0.42	— 0 0090	—0.037	—1.437	—0.152	—0.195	0.000
Oct. 13	—0.43	—0.0100	— 0.040	—1.326	—0.155	—0.203	0.000
Nov. 22	—0.44	—0.0110	—0.045	—1.213	—0 159	—0.212	0.000
1916 Jan. 1	—0.45	—0.0121	—0.051	—1.098	—0.163	—0.221	0.000
Febr. 10	—0.46	—0.0132	—0.059	—0.982	—0.167	—0.231	0.000
Mar. 21	—0.47	—0.0143	—0.068	—0.866	—0.170	—0.241	0.000
Apr. 30	—0.49	—0.0153	—0.080	—0.750	—0.174	—0.252	0.000
June 9	—0.50	—0.0163	—0.093	—0.636	—0.178	—0.263	0.000
July 19	—0.52	—0.0172	—0.107	—0.524	—0.182	—0.274	0.000
Aug. 28	—0.54	—0.0181	—0.123	—0.414	—0.184	—0.285	0.000
Oct. 7	—0.55	—0.0189	—0.140	—0.307	—0.186	—0.296	0.000
Nov. 16	—0.57	—0.0196	—0.158	—0.203	—0.188	—0.307	0.000
Dec. 26	—0.59	—0.0202	—0.177	—0.102	—0.189	—0.318	+0.001
1917 Febr. 4	—0.61	—0.0207	—0.196	—0.005	—0.189	—0.329	+0.002
Mar. 16	—0.63	—0.0211	—0.216	+0.088	—0.188	—0.340	+0.003
Apr. 2	—0.66	—0.0214	—0.237	+0.179	—0.187	—0.351	+0.004

Continued Table 6

Greenwich mean noon	μ		L_0	π	φ	Ω	i
	II_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f	I_f
		—0″.0214	—0″.237	+0″.179	—0″.187	—0″.351	+0″.004
1917 June 4	—0.68	—0.0215	—0.258	+0.267	—0.185	—0.361	+0.005
July 14	—0.70	—0.0215	—0.279	+0.352	—0.181	—0.371	+0.006
Aug. 23	—0.72	—0.0213	—0.300	+0.435	—0.177	—0.380	+0.007
Oct. 2	—0.74	—0.0210	—0.320	+0.516	—0.172	—0.389	+0.008
Nov. 11	—0.76	—0.0206	—0.340	+0.596	—0.166	—0.397	+0.009
Dec. 21	—0.78	—0.0201	—0.359	+0.675	—0.159	—0.404	+0.010
1918 Jan. 30	—0.80	—0.0195	—0.378	+0.753	—0.152	—0.411	+0.011
Mar. 11	—0.82	—0.0188	—0.396	+0.831	—0.144	—0.418	+0.012
Apr. 20	—0.84	—0.0181	—0.413	+0.908	—0.135	—0.424	+0.013
May 30	—0.86	—0.0173	—0.429	+0.986	—0.126	—0.429	+0.014
July 9	—0.88	—0.0164	—0.444	+1.064	—0.116	—0.433	+0.015
Aug. 18	—0.89	—0.0155	—0.457	+1.143	—0.105	—0.436	+0.016
Sept. 27	—0.91	—0.0145	—0.469	+1.222	—0.094	—0.439	+0.017
Nov. 6	—0.92	—0.0135	—0.479	+1.301	—0.083	—0.441	+0.018
Dec. 16	—0.94	—0.0125	—0.488	+1.381	—0.072	—0.442	+0.019
1919 Jan. 25	—0.95	—0.0115	—0.496	+1.460	—0.061	—0.443	+0.020
Mar. 6	—0.96	—0.0105	—0.502	+1.539	—0.050	—0.444	+0.021
Apr. 15	—0.97	—0.0095	—0.507	+1.617	—0.040	—0.444	+0.022
May 25	—0.98	—0.0085	—0.510	+1.693	—0.030	—0.444	+0.023
July 4	—0.99						

rected values of these masses will be $m_I + \Delta m_I$, $m_S + \Delta m_S$, and the complementary terms of the equation (1) will be

$$g \cdot \frac{\Delta m_I}{m_I}, \quad h \cdot \frac{\Delta m_S}{m_S}.$$

I have made also a trial to determine corrections Δm_I, Δm_S for the Newcomb's values m_I, m_S for the masses of Jupiter and Saturn; the cor-

Table 7

Osculating elements of Nestor for moments of normal places

Mean ecliptic 1910.0

N. pl.	Mean time Greenwich		μ	L	π	φ	Ω	i
			″	197°32′ 6.″3	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
	1908	(1)						
		(2)	+ 0.00186	− 0.7	+ 8.8	+ 0.1	0.0	0.0
I	Mar. 24.44800	(3)	0.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		(4)	301.22122	197 32 5.6	319 9 18.2	+6 7 13.0	350 1 28.7	4 31 44.0
				200 34 12.0				
	1908	(1)						
		(2)	− 0.00122	+ 0.6	− 6.9	0.0	0.0	0.0
II	Apr. 29.71956	(3)	0.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		(4)	301.21814	200 34 12.8	319 9 2.5	6 7 12.9	350 1 28.7	4 31 44.0
				202 10 18.8				
	1908	(1)						
		(2)	− 0.00206	+ 1.9	− 13.2	+ 0.3	0.0	0.0
III	May 18.86469	(3)	+ 0.00475	+ 18.6	− 21.7	+ 9.2	+ 0.3	+ 0.1
		(4)	301.22205	202 10 39.3	319 8 34.5	6 7 22.4	350 1 29.0	4 31 44.1
				230 5 13.1				
	1909	(1)						
		(2)	+ 0.01019	+ 5.5	+ 34.3	+ 2.1	0.0	0.0
IV	Apr. 17.48961	(3)	+ 0.06825	+ 3 54.3	+ 25.7	+ 1 55.9	− 2.1	− 0.1
		(4)	301.29780	230 9 12.9	319 10 9.4	6 9 10.9	350 1 26.6	4 31 43.9
				107 42 36.1				
	1917	(1)						
		(2)	+ 0.00764	+ 20.9	+ 0.1	+ 2 7	0.0	0.0
V	Jan. 25.42313	(3)	− 1.43748	+ 4 39.2	+ 2 8 14.0	+ 2 12.3	− 3 20.1	− 8.8
		(4)	299.78952	107 47 36.2	321 17 23.5	6 9 27.9	349 58 8.6	4 31 35.2
				110 8 14.6				
	1917	(1)						
		(2)	+ 0.00972	+ 19.3	+ 4.1	+ 4.2	0.0	0.0
VI	Febr. 23.43367	(3)	− 1.45816	+ 4 1.1	+ 2 8 45.2	+ 2 2.2	− 3 24.7	− 8.5
		(4)	299.77092	110 12 35.0	321 17 58.7	6 9 19.3	349 58 4.0	4 31 35.5
				138 57 24.8				
	1918	(1)						
		(2)	− 0.00169	+ 21.1	+ 14.1	− 1.3	0.0	0.0
VII	Febr. 2.86768	(3)	− 1.61556	− 4 4.3	+ 2 8 56.9	+ 41.0	− 4 0.2	− 5.7
		(4)	299.60211	138 53 41.6	321 18 20.4	6 7 52.6	349 57 28.5	4 31 38.3
				140 7 32.5				
	1918	(1)						
		(2)	− 0.00135	+ 22.2	+ 9.2	− 1.0	0.0	0.0
VIII	Febr. 16.83605	(3)	− 1.61799	− 4 22.7	+ 2 8 39.4	+ 39.5	− 4 0.6	− 5.6
		(4)	299.60002	140 3 32.0	321 17 58.0	6 7 51.4	349 57 28.1	4 31 38.4
				172 8 7.8				
	1919	(1)						
		(2)	+ 0.00734	+ 21.2	+ 28.3	+ 2.5	0.0	0.0
IX	Mar. 6.39928	(3)	− 1.61510	− 12 18.4	+ 1 59 0.9	+ 59.8	− 4 4.0	− 5.2
		(4)	299.61160	171 56 10.6	321 8 38.6	6 8 15.2	349 57 24.7	4 31 38.8
				174 26 4.7				
	1919	(1)						
		(2)	+ 0.00240	+ 20.8	+ 18.6	+ 0.5	0.0	0.0
X	Apr. 2.87738	(3)	− 1.61145	− 12 47.4	+ 1 58 12.3	+ 1 5.2	− 4 4.0	− 5.2
		(4)	299.61031	174 13 38.1	321 7 40.3	6 8 18.6	349 57 24.7	4 31 38.8
				174 55 21.2				
	1919	(1)						
		(2)	+ 0.00173	+ 21.0	+ 15.5	0 0	0.0	0.0
XI	Apr. 8.70871	(3)	− 1.61051	− 12 53.6	+ 1 58 2.6	+ 1 6.5	− 4 4.0	− 5.2
		(4)	299.61058	174 42 48.6	321 7 27.5	6 8 19.4	349 57 24.7	4 31 38.8

Table 8

Geocentric places of Nestor *O* and *C*

N. pl.	Mean time Greenwich	Mean equator	α_{obs}	δ_{obs}	α_{cal}	δ_{cal}	log ρ	$O-C$		Weight
								cos δ. $d\alpha$	$d\delta$	
I	1908 Mar. 24.44800	1908.0	187°15′45″.23	— 4°58′56″.24	187°15′43″.63	— 4°58′45″.80	0.654288	+ 1″.59	— 0″.44	2
II	Apr. 29.71956	1908.0	183 16 42.99	— 3°28 6 18	183 16 42.24	— 3 28 5.29	0.665395	+ 0.75	— 0.89	3
III	May 18.84469	1908.0	182 8 59.40	— 3 1 15.64	182 9 0.75	— 3 1 17.48	0.683461	— 1.35	+ 1.84	2
IV	1909 Apr. 17.48961	1909.0	216 31 40.14	—18 50 37.79	216 31 44.77	—18 50 43.33	0.627814	— 4.38	+ 5.54	2
V	1917 Jan. 25.42313	1917.0	114 14 15.93	+26 9 47.12	114 14 49.11	+26 9 44.81	0.673491	—29.78	+ 2.31	2
VI	Febr. 23 43367	1917.0	111 5 1.69	+26 17 21.05	111 5 33.71	+26 17 8.11	0.694824	—28.71	+12 94	2
VII	1918 Febr. 2.86768	1918.0	144 3 16.22	+17 13 12.56	144 3 39.11	+17 13 2.00	0.678654	—21.86	+10.56	2
VIII	Febr. 16.83605	1918.0	142 15 25.44	+17 42 47,89	142 15 49.77	+17 42 39.86	0.678789	—23.18	+ 8.03	1
IX	1919 Mar. 6.39928	1919.0	167 54 17.13	+ 5 34 15.93	167 54 31.17	+ 5 34 9.03	0.671568	—13.97	+ 6.90	3
X	Apr. 2.87738	1919.0	164 47 43.58	+ 6 39 58.96	164 47 57.59	+ 6 39 53.41	0.679614	—13.92	+ 5.55	2
XI	Apr. 8.70871	1919.0	164 16 10.92	+ 6 50 27.19	164 16 26.30	+ 6 50 20.67	0.683787	—15.27	+ 6.52	2

Thus an equation of condition for a moment t will have a form:

$$ad M_0 + bd\mu + cd\varphi + dds + edp + fdq + g \cdot \frac{\Delta m_I}{m_I} + h \cdot \frac{\Delta m_S}{m_S} = \\ = \cos\delta d\alpha \text{ or } d\delta. \tag{3}$$

The coefficients g and h can be calculated by the following way.

Let the perturbations of Nestor be caused by Jupiter alone during the interval $t - t_0$ are:

$\Delta_I\mu$, $\Delta_I\varphi$, $\Delta_I\pi$, $\Delta_I i$, $\Delta_I\Omega$, $\Delta_I L\Big(= \Delta_I L_0 + \int\int_I =$ the perturbation of the mean longitude of Nestor by Jupiter $\Big)$; these values may be determined from Table 3. Using the formulae (2) we calculate the corresponding values

$$\Delta_I M = \Delta_I L - \Delta_I\pi, \quad \Delta_I s = \Delta_I\pi - \operatorname{tg}\frac{1}{2} i \cdot \sin i \Delta_I\Omega, \; \Delta_I p = \\ = \cos\omega\Delta_I i + \sin\omega \sin i \, \Delta_I\Omega, \; \Delta_I q = -\sin\omega\Delta_I i + \cos\omega \sin i \Delta_I\Omega. \tag{4}$$

(one may take in these formulae the undisturbed values of i and ω). Then for the equation (3) the coefficient

$$g = a\Delta_I M + \Big(b - a\,(t - t_0)\Big)\,\Delta_I\mu + c\Delta_I\varphi + \partial\Delta_I s + \\ + e\Delta_I p + f\Delta_I q. \tag{Г}$$

And likewise:

$$h = a \cdot \Delta_S M + \Big(b - a\,(t - t_0)\Big)\,\Delta_S\mu + c\Delta_S\varphi + \partial\Delta_S s + \\ + e\Delta_S p + f\Delta_S q. \tag{Γ_1}[1]$$

The coefficient, ex. gr., g is equal approximately to the difference between the disturbed by Jupiter alone coordinate $(\alpha_I \cos\delta_I \text{ or } \delta_I)$ and the undisturbed coordinate $(\alpha_{Un}\cos\delta_{Un},\ \delta_{Un})$:

$$g = \alpha_I\cos\delta_I - \alpha_{Un}\cos\delta_{Un} \text{ or } \delta_I - \delta_{Un}. \tag{K}$$

Thus we obtain the equations of condition with 8 unknowns (the coefficients are log):

[1] By the same way can be calculated the coefficients $i, j \ldots$ in the complementary terms

$$i \cdot \frac{\Delta m \oplus}{m \oplus}, \quad j \cdot \frac{\Delta m \varphi}{m \varphi}, \ldots$$

of the equation (1), when these terms we introduce.

N. pl.										Weight
I	$9.97874\,dM_{\odot} + 1_n04867\,d\mu + 0_n20036\,d\varphi + 0.03418\,ds + 9_n62750\,dp + 9.57121\,dq + (-\infty).\frac{\Delta m_J}{m_J} + (-\infty).\frac{\Delta m_S}{m_S} = 0\ 20248.$									2
II	9.96085	1_n57138	0_n18002	0.01759	9_n63534	9.53771	$(-\infty)$	$(-\infty)$	$= 9.87426$	3
III	9.93878	1_n60725	0_n15985	9.99559	9_n62541	9.50540	$(-\infty)$	9.00000	$= 0_n12973$	2
IV	0 04945	2.63925	0_n35069	0.05841	9_n64775	8 94567	0 78533	0_n30103	$= 0_n64166$	2
V	9.99232	3.49595	0 03153	0.07077	9 05444	9 33965	3.23343	2.30320	$= 1_n47393$	2
VI	9.97106	3 47219	0.01506	0.04924	8 95044	9 27371	3 21704	2.28601	$= 1_n45801$	2
VII	9.95507	3.51109	8.68081	0.04569	8.20201	9.66843	3 07108	2.22324	$= 1_n33973$	2
VIII	9.95661	3.51097	8.79188	0.04721	7.90382	9.65890	3.07893	2.23172	$= 1_n36505$	1
IX	9.95070	3.55093	9_n94450	0.03150	9_n37533	9.70316	2.72640	1.25042	$= 1_n14531$	3
X	9.94083	3.53836	9_n92563	0.02233	9_n39117	9.68223	2.74935	1.40140	$= 1_n14349$	2
XI	9 93590	3.53302	9_n91996	0.01750	9_n39184	9.67532	2 74920	1.39794	$= 1_n18386$	2
I	9_n69655	0.50614	9.91964	9_n75160	9_n91003	9.85374	$(-\infty)$	$(-\infty)$	$= 9_n64345$	2
II	9_n68576	1.06678	9.90923	9_n74125	9_n91313	9 81550	$(-\infty)$	$(-\infty)$	$= 9_n94939$	3
III	9_n66583	1.09185	9.89175	9_n72112	9_n90235	9.78234	$(-\infty)$	$(-\infty)$	$= 0\ 26482$	2
IV	9_n64778	2_n25440	9.94887	9_n65520	0_n05033	9.34825	0_n50515	9 90309	$= 0.74351$	2
V	9_n31294	2_n81223	9_n37252	9_n39001	9.73416	0.01937	2_n56949	1_n72916	$= 0.36361$	2
VI	9_n23557	2_n73492	9_n28812	9_n31322	9.68518	0 00845	2_n49402	1_n67302	$= 1.11193$	2
VII	9_n57825	3_n13242	8_n49788	9_n66882	8.57911	0.04553	2_n70278	1_n97497	$= 1\ 02366$	2
VIII	9_n56806	3_n12121	8_n51225	9_n65864	8.29218	0.04726	2_n69618	1_n97405	$= 0\ 90472$	1
IX	9_n66564	3_n26567	9.65800	9_n74651	9_n66032	9.98815	2_n42991	1_n65992	$= 0\ 83885$	3
X	9_n65047	3_n24896	9.64174	9_n73160	9_n68248	9.97354	2_n43152	1_n67117	$= 0\ 74429$	2
XI	9_n64468	3_n24298	9.63667	9_n72582	9_n68437	9.96785	2_n42732	1_n66276	$= 0.81425$	2
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

5. The corresponding normal equations are as follows:

$$+9.51629x+5.17549y-4.080672+9.42204t+0.00646u-0.00540v+3.83970w+3.62322\xi=-4.584920.$$

$$+5.17549x+4.84507y-0.73346z+5.30644t+0.00711u-0.00239v+3.46556w+3.23081\xi=-4.110996.$$

$$-4.08067x-0.73346y+4.32296z-3.86473t-0.01833u+0.00194v+0.45202w+0.71952\xi=-0.069598.$$

$$+9.42204x+5.30644y-3.86473z+9.35597t+0.00242u-0.00202v+3.94827w+3.73493\xi=-4.685483.$$

$$+0.00646x+0.00711y-0.01833z+0.00242t+4.70932u-2.61141v-0.01748w+0.19652\xi=+0.038876.$$

$$-0.00540x-0.00239y+0.00194z-0.00202t-2.61141u+7.31863v+0.00211w-0.75415\xi=+0.011196.$$

$$+3.83970x+3.46556y+0.45202z+3.94827t-0.01748u+0.00211v+3.30187w+3.35087\xi=-3.605246.$$

$$+3.62322x+3.23081y+0.71952z+3.73493t+0.19652u-0.75415v+3.35087w+3.65904\xi=-3.573922.$$

(6)

where:

$$\frac{[0.2000]\cdot dM_0}{[1.62445]} = x, \quad \frac{[3.7895]\cdot d\mu}{[1.62445]} = y, \quad \frac{[0.5012]\cdot d\varphi}{[1.62445]} = z,$$

$$\frac{[0.2701]\cdot ds}{[1.62445]} = t, \quad \frac{[0.2008]\cdot dp}{[1.62445]} = u, \quad \frac{[0.2267]\cdot dq}{[1.62445]} = v, \tag{7}$$

$$\frac{[3.3840]\cdot \frac{\Delta m_I}{m_I}}{[1.62445]} = w, \quad \frac{[2.4537]\cdot \frac{\Delta m_S}{m_S}}{[1.62445]} = \xi$$

(the numbers in parenthesis are log).

6. Solving the equations (6) we obtain:

$$dM_0 = [1_n 0950]; \; d\mu = [\overline{3}_n 1015]; \; d\varphi = [0.8743];$$
$$ds = [1.3541]; \; dp = [\overline{1}.4100]; \; dq = [\overline{1}.7528]; \tag{8}$$
$$\frac{\Delta m_I}{m_I} = [\overline{2}_n 4950]; \quad \frac{\Delta m_S}{m_S} = [\overline{2}.3987]^*$$

Hence:

$$dL_0 = +10''.16; \; d\pi = +22''.61; \; d\Omega = +4''.48; \; di = +0''.51;$$
$$d\varphi = +7''.49; \; d\mu = -0''.0012633; \; \Delta m_I = [\overline{5}_n 4749]; \; \Delta m_S = [\overline{6}.8544].$$

Thus we have the following corrected values:

I) Nestor

Epoch $t_0 = 1908$ Apr. 12.0, mean time Greenwich

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= 199°5'24''.66 \\ \pi &= 319°9'32''.01 \\ \Omega &= 350°1'33''.18 \\ i &= 4°31'44''.51 \end{aligned}\right\} \text{mean ecliptic and mean equinox 1910.0} \tag{9}$$

$$\varphi = 6°\ 7'20''.39$$

$$\mu = 301''.2180967$$

II) Mass of Jupiter $= \frac{1}{1081}$

III) Mass of Saturn $= \frac{1}{3416}$

* $\frac{\Delta m_I}{m_I} = -0.0313 \pm 1.2450$ (*m. er.*), $\frac{\Delta m_S}{m_S} = +0.0250 \pm 0.1230$ (*m. er.*).

7. However, the weigts P_w and P_ξ of the determinations w and are too small (correspondingly: $P_w = 0.003$, $P_\xi = 21.032$). Therefore I have solved the equations (6) only for 6 unknowns and obtain:

$$dM_0 = [1_n 8795],\ d\mu = [\bar{3}_n 5702],\ d\tau = [0_n 9307],$$
$$ds = [1.7371],\ dp = [\bar{1}.4877],\ dq = [\bar{1}.0231]. \tag{10}$$

Hence:

$$dL_0 = -21''.18;\ d\pi = +54''.59;\ d\Omega = -0''.85;\ di = +0''.32:$$
$$d\varphi = -8''.53;\ d\mu = -0''.003717.$$

Thus we have the following corrected elements of Nestor:
Epoch $t_0 = 1908$ Apr. 12.0, mean time Greenwich.

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= 199°4'53''.32 \\ \pi &= 319°10'3''.99 \\ \Omega &= 350°1'27''.85 \\ i &= 4°31'44''.32 \end{aligned}\right\} \text{mean ecliptic and mean equinox 1910.0}$$
$$\varphi = 6°7'4''.37$$
$$\mu = 301''.215643 \tag{11}$$

8. The remaing residuals $v_{(8)}$ and $v_{(10)}$ (corresponding to the resolutions (8) and (10) and the equations (5)) are given in the columns 2,3 and 4,5 of Table 9. The columns 6,7 of Table 9 contain corresponding values of

Table 9

Remaining residuals

N. pl.	$v_{(8)} = O - C$		$v_{(10)} = O - C$		$v^{Kr.} = (O - C)\,d$	
	$\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\delta$
I	+0^s.05	—0''.3	+0^s.08	0''.0	—0^s.05	—0''.5
II	—0.01	—0.7	+0.01	—0.4	+0.04	—0.6
III	—0.15	+2.0	—0.13	+2.3	—0.13	+2.1
IV	+0.09	+3.4	+0.05	+3.8	+0.06	+2.2
V	+0.01	—4.7	+0.08	—4.6	+0.01	—4.5
VI	+0.01	+6.9	—0.06	+7.2	—0.01	+7.4
VII	+0.02	+0.9	—0.12	+1.9	+0.08	+1.0
VIII	—0.03	—1.5	—0.20	—0.4	—0.05	—1.7
IX	—0.01	+0.3	+0.05	—0.7	—0.03	—0.6
X	+0.04	—1.0	+0.05	—1.7	—0.05	—1.5
XI	—0.05	0.0	—0.07	—0.6	—0.07	—0.9

vK_r according to the column $(O-C)_d$ from Kristensen's Table on the page 10 (of his paper).

9. I have reduced the elements (11) to the epoch 1919 July 4.0 (mean time Greenwich) and the mean ecliptic 1920,0. The results of the corresponding calculations are given in Table 10. The line (1) contains the undisturbed elements (11); lines (2), (3) have the same sense, as in the Table 7.

Table 10

Reduction of elements (11) to 1919, July 4.0 (mean time Greenwich) and ecliptic 1920

	L	π	Ω	i	φ	μ
Elements (11) (1) . .	182° 7′57″.4	319°10′ 4″.0	350°1′27″.8	4°31′44″.3	6°7′ 4″.4	301″.21564
☿+♀ (2) . . Formulae (D_1), (D_2)	+ 26.2	— 8.4	0.0	0.0	+ 0.6	+ 0.00037
⊕+♂+♃+♄+♅+♆ (3) Tables 1—6	— 14 23.9	+ 1 56 5.9	— 4 4 0	— 5.1	+ 1 28.4	— 1.59124
Prec. to 1920.0 . . .	+ 8 22.6	+ 8 22.6	+ 8 26.9	+ 4.7	—	—
Reduced elements . .	182° 2′22″.3	321°14′24″.1	350°5′50″.7	4°31′43″.9	6°8′33″.4	299″.62477

RESULT

The elements of Nestor

Epoch and osculation 1919 July 4.0, mean time Greenwich; mean ecliptic and mean equinox 1920.0.

$$\begin{aligned} L_0 &= 182^\circ 2' 22''.3 \\ \pi &= 321^\circ 14' 24''.1 \\ \Omega &= 350^\circ 5' 50''.7 \\ i &= 4^\circ 31' 43''.9 \\ \varphi &= 6^\circ 8' 33''.4 \\ \mu &= 299''.62477 \end{aligned} \qquad \text{(V)}$$

Odessa, Astronomical Observatory.
1931, June 7.

Н. МИХАЛЬСКИЙ. ОРБИТА МАЛОЙ ПЛАНЕТЫ НЕСТОР ПО НАБЛЮДЕНИЯМ ЗА 1908—1919 ГОДЫ

РЕЗЮМЕ

Астероиды троянской группы обладают средним суточным движением почти 300″, что служит причиной значительных долгопериодических возмущений их, производимых Юпитером и Сатурном. Поэтому, мне кажется, астероиды эти могут служить удобным средством для одновременного определения как массы Юпитера, так и массы Сатурна.

Из других троянцев (открытых столь же давно) Нестор является более подходящим для указанной цели, так как малый эксцентриситет и наклонность (относительно эклиптики) его орбиты позволяют применить формулы абсолютных возмущений Нестора от некоторых больших планет, что значительно сокращает необходимую вычислительную работу по учету возмущений астероида от всех больших планет. В настоящем исследовании я применял формулы абсолютных возмущений только в отношении Меркурия и Венеры. Возмущения же Нестора, производимые Землею, Марсом, Юпитером, Сатурном, Ураном и Нептуном, вычислялись по методу механической квадратуры.[1]

На основании наблюдений Нестора за указанный период времени я попытался определить массы Юпитера и Сатурна. Однако, веса получившихся поправок к исходным Newcomb'овым значениям массы Юпитера $\left(\frac{1}{1047.355}\right)$ и Сатурна $\left(\frac{1}{3501.6}\right)$ оказались слишком малы. Поэтому, полученные мною значения этих масс надо рассматривать только как результаты вычислительного примера.[2]

Затем, я воспользовался имевшимся вычислительным и наблюдательным материалом для определения окончательной орбиты Нестора за период 1908—1919 гг при учете возмущений от восьми больших планет. Соответствующие результаты представлены системой (V) настоящего исследования.

Пользуюсь случаем выразить свою искреннюю благодарность Сергею Владимировичу Доничу, который и теперь, как неоднократно раньше, любезно согласился просмотреть мой английский текст.

Одесса, Астрономическая обсерватория.
1932, 22 мая.

[1] Имея уже соответствующий материал по учету возмущений от каждой большой планеты, я получил возможность вывести формулы абсолютных возмущений также для Земли и Марса (см. Astronomische Nachrichten, № 5694), Урана и Нептуна (см. Astronomische Nachrichten, № 5850). Таким образом, работа дальнейших вычислений возмущений Нестора резко сокращается, так как механическую квадратуру для Юпитера и Сатурна можно вести с интервалом в 160 дней.

[2] Вывод формул (Г), (Γ_1) дан мною в «Астрономическом журнале», т. IX (вып. 1—2).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ВОЗДУШНОГО СУДНА ПРИ ПОВОРОТЕ

(ОЧЕРКИ ПО МЕХАНИКЕ ПОЛЕТА ВОЗДУШНЫХ СУДОВ, № 11),

А. Г. ВОРОБЬЕВА

(*Представлено академиком* А. Н. Крыловым)

Техника воздушного судостроения (дирижаблестроения) имеет к настоящему времени решенными такие задачи, как определение скорости полета воздушного судна при поступательном его движении в плоскости симметрии.*

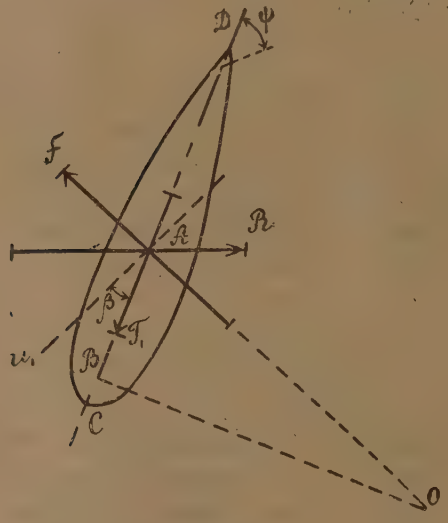
Гораздо менее разработан вопрос об определении скорости судна при повороте. Настоящая работа, произведенная по поручению Научно-Исследовательского Аэро-Института при Учебном комбинате Гражданского воздушного флота в Ленинграде, стремится заполнить пробел в этом отношении. Устранение этого пробела тем более интересно, что академиком А. Н. Крыловым в одном из его докладов в Академии Наук СССР в 1931 г. («Одна из главных причин гибели дирижаблей: R 38, R 101 и некоторых других») очень выпукло поставлен вопрос об одной из возможных причин гибели некоторых судов в виде чрезмерно больших изгибающих моментов в корпусах таковых при повороте. Конечно величина этих моментов, в первую очередь, определяется величинами тех скоростей, которые судно при повороте имеет. Подобное обстоятельство повлекло даже некоторую разработку этого вопроса в трудах специальной комиссии по воздухоходности

* См., например, наши работы «Меморандум об определении скорости полета воздушного судна (с предисловием)» (еще не опубликован, но принимаются меры к опубликованию в Трудах Научно-Исследовательского Аэро-Института при Учебном Комбинате Гражданского воздушного флота, в связи с работами в коем он написан), «Меморандум о введении при определении динамических перегрузок и динамических высот воздушных судов поправки на изменение коэффициента полезного действия винтов» (тоже), «О зависимости скорости полета воздушного корабля от высоты» («Кораблестроитель» за июль 1923 г.) и «Об определении динамических высот, достигаемых динамически воздушными кораблями» (Научное приложение к журналу «Вестник воздушного флота», № 5—6 за 1925 г.).

воздушных судов при английском Aeronautical Research Commitee* и в работе Cox'a.**

Однако, в первых, без всяких доказательств устанавливается лишь, что прочность судна при повороте следует считать на скорость в 75% от скорости при движении вдоль оси, а во второй дается далеко не полное решение задачи, причем настолько неполное, что автор ее вновь без всякого рода доказательств предлагает в конце концов пользоваться лишь упомянутою выше нормою в 75%.

Рассмотрим фиг. 1 — поворачивающееся в горизонтальной плоскости воздушное судно. Мы будем предполагать поворот его установившимся.



Фиг. 1.

Это значит, что центр тяжести судна A (мы будем предполагать, что он находится в плоскости симметрии судна, которую, в свою очередь, мы будем считать вертикальною; последнее не совсем верно, так как судно при повороте получает некоторый крен, которым мы пренебрегаем) описывает в горизонтальной плоскости окружность некоторого радиуса $r = OA$.

Как известно, воздушное судно обладает такими свойствами, что перпендикуляр OB, опущенный из центра O на ось судна, имеет свое основание B находящимся весьма близко около носовой точки судна C.

Основными соотношениями, служащими для получения искомой скорости при повороте, являются равенства:

$$T_0 U_0 = \eta_0 \cdot 75 N_0 \tag{1}$$

* См. Report of the airworthiness of airships Panel в R & M Aeronautical Research Committee, № 970 (октябрь 1924 г.).

** Cox. External forces on an airship structure, with special reference to the requirement of rigid airship design. Royal Aeronautical Society. London, 1929.

и

$$T_1 U_1 \cos\beta = \eta_1 \cdot 75 N_1, \tag{2}$$

где N_0 — мощность, даваемая двигателями при поступательном движении судна вдоль оси, N_1 — подобная же мощность при повороте, η_0 и η_1 — коэффициенты полезного действия винтомоторных установок при этих же условиях, U_0 и U_1 — скорости в двух рассматриваемых случаях, T_0 и T_1 — силы тяги в этих обоих случаях и, наконец, β показано на фиг. 1.

Деля (2) на (1) получаем

$$\frac{T_1}{T_0} \cdot \frac{U_1}{U_0} \cos\beta = \frac{N_1}{N_0} \cdot \frac{\eta_1}{\eta_0}. \tag{3}$$

Но

$$T_0 = X_0, \tag{4}$$

а (фиг. 1)

$$T_1 = np_{CD} R + np_{CD} F$$

или, вводя обозначение

$$np_{CD} R = X_1,$$

$$T_1 = X_1 + \frac{mU_1^2}{r} \sin\beta. \tag{5}$$

В (4) X_0 — сила сопротивления воздуха движению судна вдоль его оси (при развитии моторами мощности N_0), а в (5) m — масса всей движущейся системы.

Как известно

$$X_1 = X' + X_r r,$$

где X' — величина силы X_1, когда судно имеет лишь поступательное движение вдоль своей оси со скоростью U_1 (не U_0!), r — угловая скорость поворота, а X_r — некоторый коэффициент пропорциональности, устанавливающий влияние на X_1 величины r.

Между прочим эта величина часто именуется производною сопротивления, так как очевидно

$$\frac{\partial X_1}{\partial r} = X_r.$$

Известно также, что

$$X' = A_1 U_1^2,$$

где A_1 некоторый коэффициент пропорциональности,* а

$$r = \frac{U_1}{\mathfrak{r}},$$

почему

$$X_r = BU_1$$

(B новый коэффициент пропорциональности) и, значит,

$$X_1 = \left(A_1 + \frac{B}{\mathfrak{r}}\right) U_1^2.$$

Подставляя это значение в (5), находим

$$T_1 = \left(A_1 + \frac{m \sin\beta + B}{\mathfrak{r}}\right) U_1^2, \tag{6}$$

а, принимая во внимание (4) и

$$X_0 = A_0 U^2,$$

из (3) получаем

$$\frac{A_1 + \frac{m \sin\beta + B}{\mathfrak{r}}}{A_0} \cos\beta \cdot \left(\frac{U_1}{U_0}\right)^3 = \frac{N_1}{N_0} \cdot \frac{\eta_1}{\eta_0}.$$

Отсюда

$$U_1 = \sqrt[3]{\frac{A_0}{A_1 + \frac{m \sin\beta + B}{\mathfrak{r}}} \cdot \sec\beta \cdot \frac{N_1}{N_0} \cdot \frac{\eta_1}{\eta_0}} \cdot U_0.$$

Если режимы работы моторов таковы, что

$$\frac{N_1}{N_0} = 1,$$

* Он находится помощью опытов, напр., либо в аэродинамических трубах, либо над судами в натуре.

то

$$U_1 = \sqrt{\frac{A_0}{A_1 + \frac{m \sin \beta + B}{r}} \cdot \sec \beta \cdot \frac{\eta_1}{\eta_0}} \cdot U_0.$$

Как известно при определении диаметров циркуляции (которые, как также известно, не зависят от скорости движения, т. е. в частности, в данном случае, от скорости поворота) для каждого угла отклонения рулей (назовем его через ψ) найдутся отвечающие ему и β.

Значит

$$\sqrt[3]{\frac{A_0 \sec \beta}{A_1 + \frac{m \sin \beta + B}{r}}} = f(\psi) = \varphi(r) \tag{7}$$

и

$$U_1 = f(\psi) \cdot \sqrt[3]{\frac{\eta_1}{\eta_0}} \cdot U_0 = \varphi(r) \cdot \sqrt[3]{\frac{\eta_1}{\eta_0}} \cdot U_0.$$

Для нахождения численного значения U_1, зная U_0, следует сначала слелать предположение

$$\frac{\eta_1}{\eta_0} = 1$$

и найти для U_1 первое приближение

$$U_1 = U_1' = f(\psi) \cdot U_0 = \varphi(r) \cdot U_0.*$$

Определяем известную величину

$$\lambda' = \frac{U_1'}{n_s D}$$

где n_s — число оборотов винтов в секунду (предполагается для всех винтов одинаковым), а D — диаметр винтов и с так называемой характеристики винта (фиг. 2) снимаем η_1', отвечающее этому λ'.

Находим

$$\sqrt[3]{\frac{\eta_1'}{\eta_0}}$$

* Очевидно должно получиться

$$U_1' < U_0,$$

т. е. должно быть

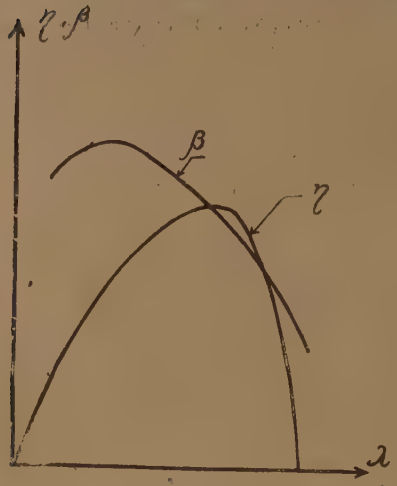
$$f(\psi) = \varphi(r) < 1.$$

и определяем второе приближение для U_1

$$U_1 = U_1'' = U_1' \sqrt[3]{\frac{\eta_0'}{\eta_0}}.$$

Получив таковое, вновь определяем

$$\lambda'' = \frac{U_1''}{n_s D},$$



Фиг. 2.

с характеристики винта снимаем η_1'', находим

$$\sqrt[3]{\frac{\eta_1''}{\eta_0}}$$

и получаем

$$U_1 = U_1''' = U_1' \sqrt[3]{\frac{\eta_1''}{\eta_0}}$$

и т. д. Таким образом продолжаем поступать до тех пор пока у нас не начнут получаться U_1'''', U_1''''' и т. д. одинаковыми.

Следует отметить, что в изложенном способе ни в коем случае нельзя полагать

$$A_1 = A_0,$$

так как A_0 относится к случаю, когда угол отклонения рулей $\psi = 0$, а A_1 к случаю когда ψ нулю не равно. Правда они разнятся друг от друга, возможно, незначительно, но принципиально являются величинами различными и, потому, во всяком случае не должны смешиваться. В частности обязательно

$$A_1 > A_0,$$

так что

$$A_1 = (1 + \alpha) A_0$$

и, значит, $f(\psi)$ или $\varphi(\tau)$ может быть придан вид

$$f(\psi) = \varphi(\tau) = \sqrt[3]{\frac{\sec \beta}{1 + \alpha + \frac{m \sin \beta + B}{\tau}}}.$$

Точно также нужно иметь в виду, что и B следует брать, вообще говоря, для случая $\psi \neq 0$. Исключением может быть лишь тот случай, когда $\psi = 0$ отвечает наличию у судна некоторой циркуляции, скоростью во время которой мы интересуемся (но в таком случае и $A_1 = A_0$, $\alpha = 0$).

Наконец следует отметить, что кривую, представленную на фиг. 2 (характеристику винта), следует брать, вообще говоря, при наличии у винта бокового скольжения. Лишь при отсутствии надлежащих данных или при наличии таковых лишь в первом приближении допустимо брать обычную характеристику винта.

Впрочем, возможно, что введение подобного уточнения не имеет большого значения еще потому, что в судах, начиная с 20—25 тысяч кубических метров, винтам приходится работать вблизи корпуса, обтекание коего, во время поворота, при настоящем состоянии наших знаний по этому вопросу, остается неизвестным, так что мы пока еще не имеем и возможности задаться более или менее вероятными величинами скольжения (если только вообще полагать таковое существующим).

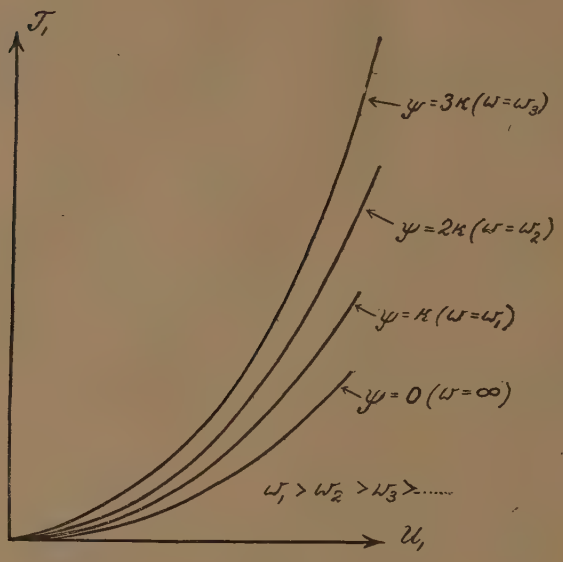
Изложенный способ предполагает, что для определения U_1 необходимо предварительно знать U_0. Можно, однако, дать способы непосредственного определения U_1, причем они будут таковыми же, каковыми являются способы определения и U_0,* но с некоторыми видоизменениями, проистекающими из-за наличия у судна кроме поступательного движения некоторого вращения. Опишем кратко эти способы с этими видоизменениями.

Как и при определении U_0 можно дать два способа определения интересующей нас скорости U_1. При применении обоих способов предполагаются заранее определенными τ и β, если дано ψ. Как и при определении U_0 один из способов покоится на сравнении с потребными даваемыми винтами тяг (первый способ), а другой — мощностей (второй способ). С этими целями, при первом способе строим (фиг. 3) сначала кривые потребных сил тяг, а при втором — кривые потребных мощностей (фиг. 4). Первые являются

* См., например, наши работы «Меморандум об определении скорости полета воздушного судна (с предисловием)» и «Меморандум о втором способе определения скорости полета воздушного судна», исполненные по поручению Научно-Исследовательского Аэро-Института при Учебном Комбинате Гражданского воздушного флота в Ленинграде, а также «Очерки по механике полета воздушных судов. № 10. Определение скорости полета воздушных судов при движении их вдоль оси» (№ 5—6 журнала «Техника воздушного флота» за 1932 г.).

обыкновенными параболами, дающими графическое изображение уравнений (6) для различных ψ, а вторые — графическим изображением величин

$$N = T_1 U_1 \cos\beta = \left(A_1 + \frac{m\sin\beta + B}{r}\right) \cdot \cos\beta \cdot U_1^3.$$



Фиг. 3.

Иначе: если ввести обозначения

$$A_1 + \frac{m\sin\beta + B}{r} = f_1(\psi) = \varphi_1(r)$$

и

$$\left(A_1 + \frac{m\sin\beta + B}{r}\right) \cdot \cos\beta = f_2(\psi) = \varphi_2(r),$$

то кривые на фиг. 3 будут обыкновенными параболами

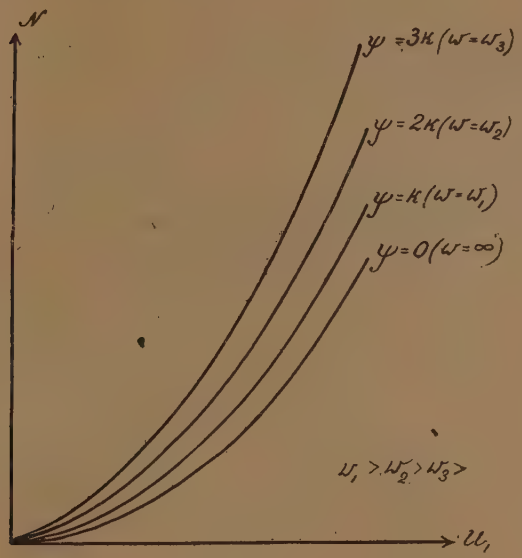
$$T_1 = f_1(\psi) \cdot U_1^2 = \varphi_1(r) \cdot U_1^3,$$

а кривые на фиг. 4 — кубическими параболами

$$N = f_2(\psi) \cdot U_1^3 = \varphi_2(r) \cdot U_1^3,$$

где $f_1(\psi)$, $\varphi_1(r)$, $f_2(\psi)$ и $\varphi_2(r)$ уже связаны с хорошо нам известными функциями (7) $f(\psi)$ и $\varphi(r)$ соотношениями

$$\frac{A_0 \sec\beta}{f_1(\psi)} = \frac{A_0 \sec\beta}{\varphi_1(r)} = \frac{A_0}{f_2(\psi)} = \frac{A_0}{\varphi_2(r)} = [f(\psi)]^3 = [\varphi(r)]^3.$$



Фиг. 4.

Для решения задачи на семейства кривых на фиг. 3 и 4 следует наложить семейства кривых, даваемых винтами тяг или мощностей (соответственно). Эти вторые семейства нанесены на фиг. 5 и 6, причем на первой из них Ф обозначают эти тяги, а на второй N_b — мощности. Как известно, они получаются нижеследующим образом. Берем так называемую характеристику винта (фиг. 2) где β и η известные коэффициенты пропорциональности в выражениях их мощности, затрачиваемой на проворачивание винта в воздухе,

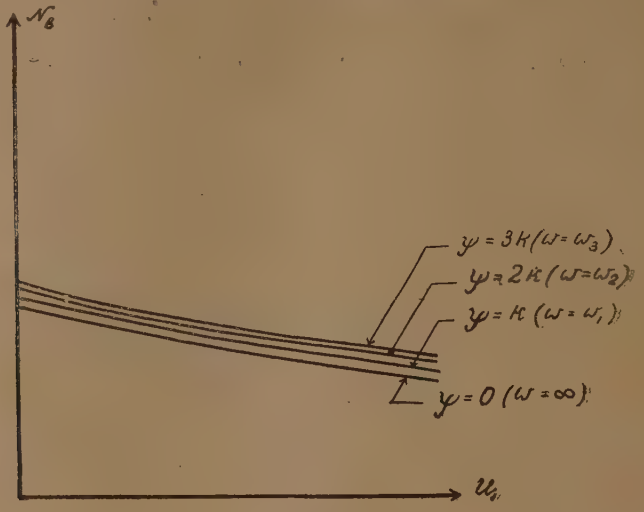
$$N_b' = \beta \cdot \rho D^5 n_s^3 \tag{8}$$

и мощности, отдаваемой винтом,

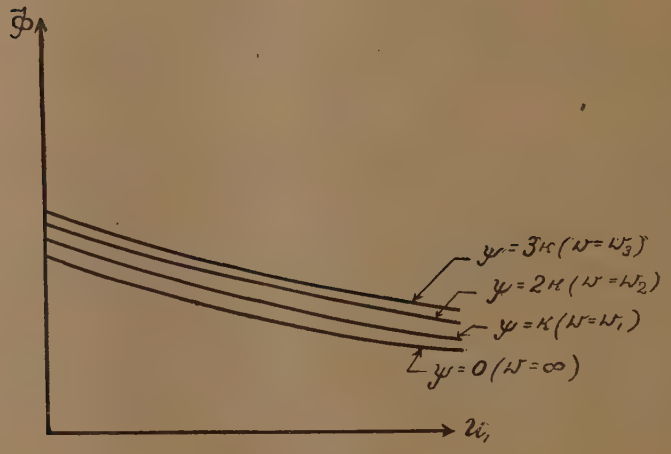
$$N_b = \eta N_b' \tag{9}$$

причем в (8) ρ — массовая плотность воздуха, в котором проворачивание винта должно производиться, а все остальные обозначения уже встречались.

Задаемся $\lambda = \lambda', \lambda'', \lambda''' \ldots$ и с характеристики снимаем отвечающие им $\beta = \beta', \beta'', \beta''' \ldots$ и $\eta = \eta', \eta'', \eta''' \ldots$



Фиг. 5.



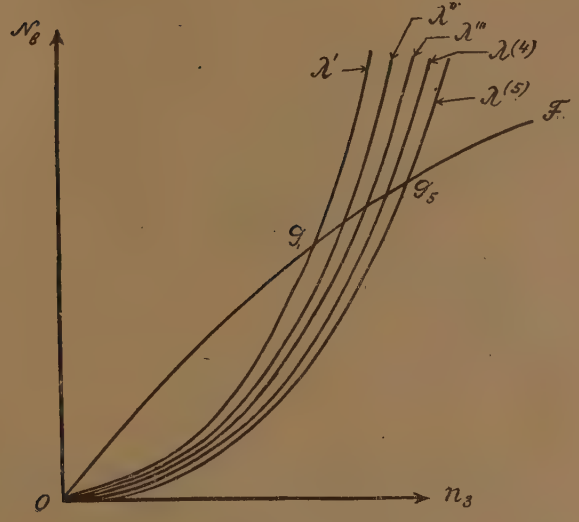
Фиг. 6.

Зная β, строим, пользуясь (8), семейство кубических парабол, представленных на фиг. 7, и наносим на него характеристику двигателя $0 G_1 G_5 F$. Точки пересечения дают некоторые совокупности

$$[\lambda', n_s', (N_b')'], [\lambda'', n_s'', (N_b')''], [\lambda''', n_s''', (N_b')'''], \ldots$$

Из них первые две величины каждой совокупности в связи с тем, что

$$\lambda = \frac{U_1}{n_s D},$$



Фиг. 7

обнаруживают отвечающие каждой из этих совокупностей скорости

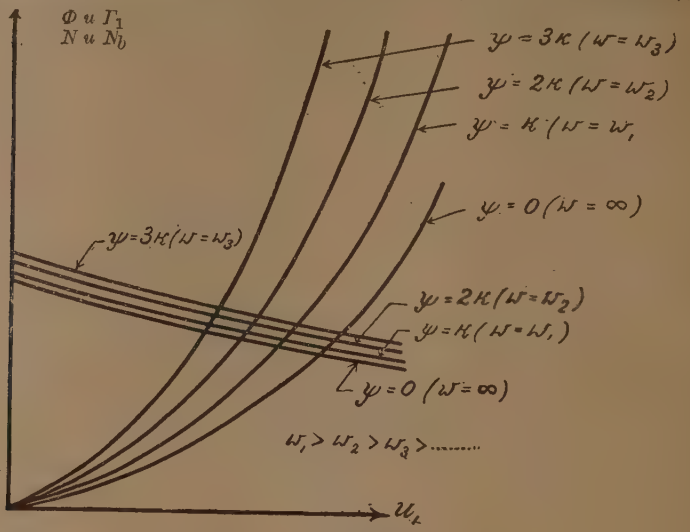
$$U_1' = \lambda' n_s' D$$
$$U_1'' = \lambda'' n_s'' D$$
$$U_1''' = \lambda''' n_s''' D$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

А это дает возможность, зная кроме того $\eta = \eta', \eta'', \eta''', \ldots$ (см. выше), найти на основании (9) соответствующие друг другу пары значений U_1 и N_b. А это и значит построить семейство, изображенное на фиг. 6.

Чтобы построить семейство, представленное на фиг. 5, можно использовать понятную зависимость

$$N_b = \Phi U_1.$$

Накладывая теперь либо фиг. 5 на фиг. 3 (при первом способе), либо



Фиг. 8.

фиг. 6 на фиг. 4 (при втором способе), получаем (фиг. 8) возможность дать для всякого угла отклонения рулей направления ψ (и значит для соответствующего радиуса циркуляции r) соответствующие значения U.

Ленинград, 10 апреля 1932.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

К ВОПРОСУ ОБ ЭЛЕКТРОКРИСТАЛЛИЗАЦИИ МЕТАЛЛОВ

В. А. КИСТЯКОВСКИЙ и П. Д. ДАНКОВ

Статья вторая[1]

О центрах электрокристаллизации

Одному из авторов этой статьи (П. Д. Данкову) удалось экспериментально доказать, что предварительная прибавка коллоида меди не изменяет структуры медных осадков, получаемых при электролитическом осаждении. Это данное, конечно, не может окончательно решить вопроса о процессе кристаллизации меди при электролизе, однако, оно вносит известную определенность в том смысле, что электрокристаллизация меди не идет путем предварительного образования коллоидных частиц такого же типа, как в обычных коллоидных золях меди. Экспериментальная часть работы (О центрах электрокристаллизации), изложенная ниже, полностью выполнена П. Д. Данковым, согласно общего плана работ по электрокристаллизации металлов, руководимых акад. В. А. Кистяковским.

1. Несмотря на внимание, уделяемое вопросам электрокристаллизации, до сих пор остается не вполне ясным механизм образования кристаллических центров на катоде. Изучение микроструктуры электролитических осадков[2] привело уже к весьма интересным заключениям о законах роста кристаллов,[3] тогда как работы по исследованию механизма образования зародышей[4] не дали однозначных результатов. Некоторые авторы (Зивертс и Виппельманн,

[1] См. В. А. Кистяковский, Ю. В. Баймаков и И. В. Кротов. К вопросу об электрокристаллизации металлов. I структура электролитических осадков меди. Изв. Акад. Наук по отд. физ.-мат. наук, 1929, стр. 771.

[2] В. А. Кистяковский, Ю. В. Баймаков и И. В. Кротов. Цит. соч., стр. 777 — Sieverts u. Wipppelmann, Z. f. anorg. Chem., 39, 91 (1915),; 93 (1915). — Kohlschütter, Z. f. Elektrochem., 33 (1927), 273

[3] В. А. Кистяковский, Ю. В. Баймаков и И. В. Кротов. Цит. соч., стр. 781.

[4] Sieverst u. Wippelmann, loc. cit.; Freundlich u. Fischer, Z. f. Elektrochem. 18, 885 (1912), Marc, Z. f. physik. chem., 67, 410; 68, 104 (1909); Kohlschüter, loc. cit. 19, 181 (1913); Müller u. Bahnje, Zeit. f. Elektrochem., 12, 317 (1906); Grube u. Reusz, Z. f. Elektrochem. 27, 45 (1921). Косоногов, Ж Р Ф Х О, 41, 373 (1909); Foerster, «Elektrochemie wässeriger Lösungen» (1923).

Марк, Фрейндлих и Фишер, Кольшуттер и др.) полагали, что основным фактором, вызывающим зарождение нового центра кристаллизации, является адсорбция посторонних веществ (комплексных образований или коллоидальных примесей) на гранях растущих кристаллов; адсорбционная пленка мешает выделяющимся атомам ориентироваться на элементах старого кристалла, и атомы вынуждены образовывать зародыши, растущие до образования новой адсорбционной пленки. Другие исследователи (Мюллер и Бантже, Грубе и Рейз, Косоногов и др.) высказали предположение о предварительном образовании в прикатодной жидкости зародышей — коллоидальных частиц, которые, эндосмотически уплотняясь на катоде, становятся новыми центрами кристаллизации.

Справедливость этих точек зрения, казалось бы, можно было проверить прямыми опытами искусственного введения коллоидального металла в католит, увеличивая тем самым концентрацию гипотетических зародышей. Изучение микроструктуры осадков, полученных из таких растворов, могло бы быть решающим.

В настоящей работе, проведенной по предложению одного из нас (академика В. А. Кистяковского), такие опыты были поставлены.

2. В качестве объекта опытов была выбрана медь, как хорошо изученная в электрохимическом и металлографическом отношениях. Чтобы получить отчетливые результаты — одновременно с опытами электроосаждения в присутствии коллоидальной меди — были поставлены опыты электролиза кислых растворов сернокислой меди, свободных от коллоидальных примесей. Учитывая возможное влияние коллоидальной «защиты», параллельно уже указанным опытам проводились опыты электроосаждения в присутствии коллоидальной меди, защищенной небольшими количествами желатины и для сравнения — в присутствии одной только желатины. Опыты проводились сериями, включающими перечисленные вариации. Каждая серия опытов проводилась одновременно и в совершенно одинаковых условиях температуры, концентрации ионов Cu· и H., перемешивания и т. д. В следующей сводке приведены характеристики опытов одной серии:

№№ по порядку	Концентр. Cu_2SO_4 в нормал.	Концентр. H_2SO_4 в нормал.	Концентр. золи меди в г/л	Концентр. желатины в г/л	Температ. С	Плотность тока в амп/см²	Примечание
1.	0.1	0.1	—	—	18°	0.005	Перемешивание одинаковое. Продолжительность электролиза 20 ч.
2.	0 1	0.1	0.01—0.05	—	18	0.005	
3.	0.1	0.1	0.01—0.05	0.1	18	0.005	
4.	0.1	0.1	—	0.1	18	0.005	

Следующие серии опытов, поставленных как контрольные, находились в таких же условиях, как и первая.

3. Золь меди, вводившийся в электролизуемый раствор, получался путем распыления в вольтовой дуге переменного тока.[1] Металлический золь, полученный этим путем, всегда сопровождался большими количествами зеленого или коричневого золя окиси меди. Это обстоятельство затрудняло анализ. Однако, в виду сравнительно большого различия в скоростях растворения коллоидальной меди и коллоидальной окиси меди в азотной кислоте, затруднение было преодолено. Коллоидальная окись меди растворяется в азотной кислоте в 15—20 раз быстрее, чем медь. Золь меди в проходящем свете совершенно бесцветен и поэтому при титрировании смеси золей азотной кислотой исчезновение зеленой (или коричневой) окраски служило как индикатор. Последующее определение общего содержания меди в растворе путем элекролиза позволяло найти количество металлического золя.

Применявшиеся препараты коллоидальной меди изучены и будут описаны в указанной выше работе. Ультрамикроскопическое исследование показало, что золь меди содержит частицы порядка 0.1—0.2 μ, хотя наряду с такими крупными частицами обнаруживались и амикроны. Коагуляция золя меди сернокислой медью и серной кислотой протекает различно. Сернокислая медь растворяет золь, а серная кислота выделяет кристаллический осадок меди. Однако, смесь ($CuSO_4 + H_2SO_4 — Ag$), действуя вообще растворяющим образом, при невысоких концентрациях сравнительно медленно растворяет коллоидальную медь. Ясно выраженный эффект Тиндаля в растворе 0.1n $CuSO_4$ + 01n H_2SO_4 + 0.01 л золя меди может быть обнаружен спустя час после смешения электролита с золем.

4. Сравнительно малая устойчивость золя меди в присутствии смеси ($CuSO_4 + H_2SO_4$) привела к необходимости периодической смены (через час) электролизуемого раствора; чтобы условия электролиза оставались одинаковыми для всей серии опытов, растворы менялись и в других элементах серии. Поверочные опыты показали, что периодическая смена электролита (если операция смены производилась достаточно быстро и аккуратно) на микроструктуре осадков не отражалась.

5. Осадки меди, полученные путем электролиза описанных растворов, были металлографически изучены. Исследованы шлифы срезов как перпендикулярных плоскости осадка, так и параллельных ей. Наблюдение производилось при 420-кратном увеличении.

[1] В. А. Кистяковский и П. Д. Данков (готовится к печати).

Микроструктура осадков хорошо воспроизводится на снимках, приведенных в таблицах I и II. Эти снимки соответствуют случаям, пронумерованным в сводке на стр. 994.

Как видно из микрофотографии (табл. I) случай 1 (фиг. 1), соответствующий электролиту, не содержавшему золя меди, и случай 2 (фиг. 2), где добавка золя меди имела место, привели к практически одинаковой микроструктуре осадков. Снимки срезов (фиг. 3 и 4), параллельных плоскости осадка, относятся к случаю № 1 и отличаются только глубиной шлифовки. Срез, близкий к поверхности катода-основания (фиг. 4) заключает сечения кристалликов, возникших в начале процесса. На фиг. 3 мы видим сечения уже выросших кристаллов. Аналогичные срезы для случая 2 выглядят совершенно так же и как не характерные здесь не приводятся.

Точно так же, микрофотографии (табл. II, фиг. 1,2,3,4) для случаев № 3 и № 4, соответствующих желатиновым растворам, не содержащим (сл. № 3, фиг. 1 и 2) и содержащим (сл. № 4, фиг. 3 и 4) коллоидальную медь, не показывают заметных различий.

6. Анализ экспериментального материала приводит к заключению о невозможности возникновения центров электрокристаллизации вне катодной поверхности. Микроструктура осадков, полученных как в присутствии коллоидальной меди, так и в отсутствии ее, оказывается одинаковой. Несмотря на наличие постоянно поддерживаемой концентрации золя меди, соответствующей приблизительно 1. 10^{10} частиц на 1 куб. см раствора, увеличения числа кристаллов не наблюдалось. Точно так же «защита» золя меди желатиной не вызывает заметных изменений структуры, свойственной электроосадкам, полученным в присутствии желатины.

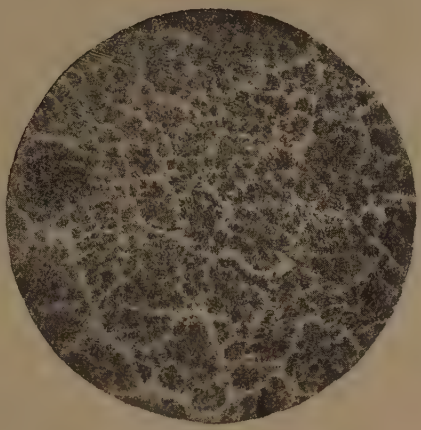
7. При рассмотрении структуры осадков, полученных в присутствии желатины, обращают внимание характерные образования — дендриты, прорастающие через толщу осадка. Если структура промежуточной слоистой массы неразличима, то ветвистые образования, очевидно, имеют кристаллическое строение двойникового типа. Подобные формы принимает, напр., свинец, вытесняемый из раствора солей цинком в присутствии желатины и т. д. Вероятно, природа и механизм образования дендритов меди в электролитических осадках и дендритов свинца и др. в присутствии лиофильных коллоидов более или менее одинакова.[1]

[1] П. Д. Данков приносит свою благодарность академику В. А. Кистяковскому и инженеру Ю. В. Баймакову за внимание к настоящей работе и указания; инженера Б. Ф. Гращенко благодарит за помощь при металлографическом исследовании.

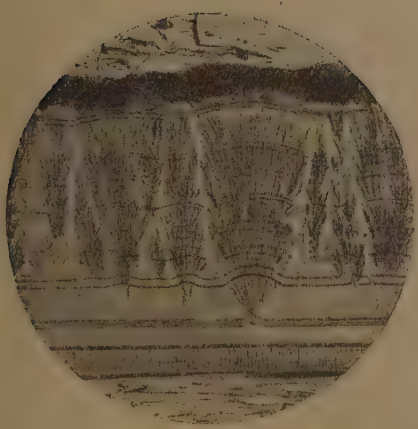
Ленинград
1931 г. 1 XII.

В. А. Кистяковский и П. Д. Данков. К вопросу об электрокристаллизации металлов.

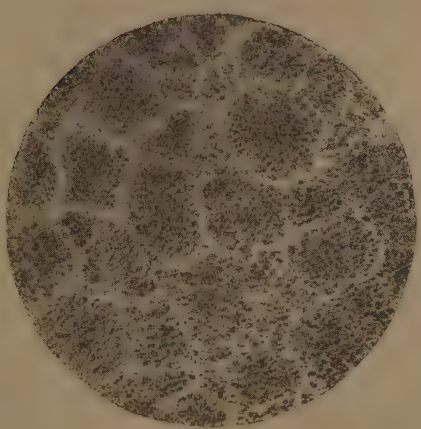
1



2

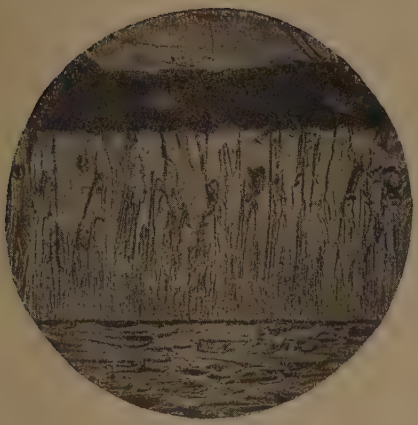


3

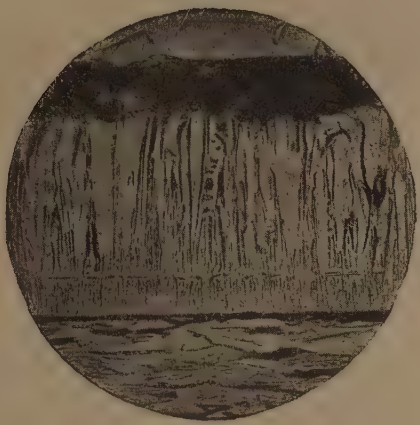


4

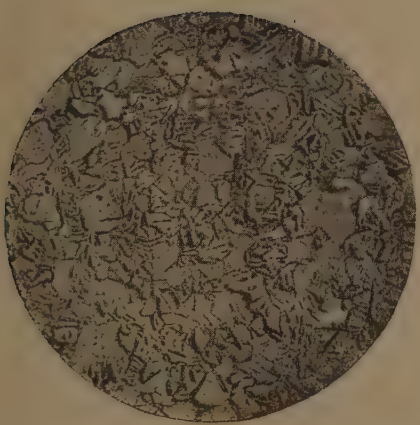
В. А. Кистяковский и П. Д. Данков. К вопросу об электрокристаллизации металлов.



1



2



3

4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ГЕОСИНКЛИНАЛИ И ВЕЛИКИЕ НАЗЕМНЫЕ АЛЛЮВИАЛЬНЫЕ РАВНИНЫ

Б. Л. ЛИЧКОВА

(*Представлено академиком* В. И. Вернадским)

А. А. Борисяк в известной своей речи о теории геосинклиналей высказал мысль, что «та стадия развития земли, которая характеризовалась проявлением геосинклиналей, миновала».[1] Я не считаю, чтобы это мнение было правильным. Наоборот, в дальнейшем изложении я постараюсь показать, что по существу оно не верно: никакого такого перелома в истории земли не произошло, чтобы новое возникновение геосинклиналей стало невозможным. Я не хочу этим сказать, что в истории нашей планеты перерывы в существовании геосинклиналей невозможны; наоборот, они неизбежны. Возможно, что переживаемая нами сейчас эпоха и является такими временным перерывом. В этом ограниченном смысле взгляд А. А. Борисяка может быть признан правильным. Есть очевидно в жизни земли эпохи, когда геосинклинали больше подчеркнуты, резче бросаются в глаза, сильнее развиты, и другие эпохи, когда они не так заметны и даже (временно) в эпохи горообразования отсутствуют. Мы как раз живем, мне думается, в эпоху, когда геосинклинали, если не отсутствуют вовсе, то не так сильно бросаются в глаза, потому что они лишь незадолго перед этим начали вновь закладываться. Волнами сменяют друг друга в истории земли фазы геологических циклов, и в этих фазах — частях цикла, как известно, находят свое место и горообразование и подготовительные процессы к нему и другие явления.

[1] А. А. Борисяк. Теория геосинклиналей. Изв. Геол. ком., 1924, т. X, Ш, № 1, стр. 9.

[2] Связь больших аллювиальных равнин с оледенениями выдвинута впервые мною в статье «Древние оледенения и великие аллювиальные равнины», вышедшей в свет в 1930 г. (Природа, 1930, № 10) и подробно разработана и обоснована в работе «О древних оледенениях и великих аллювиальных равнинах, ч. I» (Зап. Гос. гидрол. инст., т. IV, 1931). В обеих этих работах зависимость этих двух явлений освещена для четвертичного времени

Ведь циклическая периодичность проявляет себя по отношению ко многим явлениям природы, а не только к фазам горообразования. Для примера можно указать на оледенения и сопровождающие их великие аллювиальные равнины, в значительной мере являющиеся их отражением и следствием; ведь они тоже периодичны.[1] И невольно приходит в голову такая мысль: нет ли связи между периодичностью, с какой становятся то заметными, то, так сказать, скрываются геосинклинали, и периодичностью эпох появления и отсутствия великих аллювиальных равнин? Нетрудно сообразить, что связь между ними должна быть хотя бы уже просто потому, что аллювиальные равнины — следствие оледенения и, следовательно, косвенно результат завершенного горообразования; геосинклинали с горообразованием связаны еще более явно. Очевидно при этих условиях должна существовать какая-то связь между геосинклиналями и наземными аллювиальными равнинами. Это несомненно, но в чем эта связь может выражаться, это во многих отношениях неясно. Грабау не слишком давно высказал мысль о том, что геосинклинали могут мигрировать, т. е. перемещаться с места на место.[2] В качестве примера миграции геосинклинали Грабау привел Индо-Гангскую котловину, которая заполнена, помимо довольно мощной толщи речных отложений, слоями так называемой сиваликской толщи, достигающей более 4800 м мощности и состоящей из континентальных, пресноводных и наземных отложений от олигоцена и до понта (в последнее время всю эту толщу есть тенденция относить к четвертичному времени). Этот пример, приведенный Грабау, чрезвычайно поучителен. Перед нами здесь древне-аллювиальные и во всяком случае континентальные отложения, но они имеют огромную мощность, сходную с мощностями геосинклинальных отложений, и поэтому вполне естественно Грабау приходит на мысль, хотя это и не совсем так, что это — геосинклиналь, которая мигрировала на сушу.

Присмотримся, однако, несколько подробнее к породам Индо-Гангской или, лучше, Предгималайской территории.

Производившиеся здесь бурения показали, что дно Индо-Гангской долины состоит из озерно-речного аллювия с мощными прослоями эоловых

[1] Идею периодической повторяемости на земном шаре великих аллювиальных равнин я обосновываю подробно во второй части моей работы о древних оледенениях и великих аллювиальных равнинах (Зап. Гос. гидрол. инст., т. VI, в печати). Соответственно этому первая часть дальнейшего изложения (до стр. 1006) составит краткое суммирование тех выводов, к которым я пришел в указанной выше моей большей работе. Кратко о том же см. в моей статье «Древние оледенения и великие аллювиальные равнины в истории земного шара» (Изв. Гос. гидрол. инст., 1922).

[2] A. Grabau. Migration of geosynclines. Bull. Soc. Geol. of China, III, № 3—4, Peking, 9124.

песков. Морской фауны здесь нет, зато имеются остатки черепах, крокодила, разных рыб, речные и болотные моллюски, торф. Эти континентальные отложения уходят на глубину 300 м ниже у. м., что доказывает медленное опускание всей этой территории по мере накопления донных осадков. Эта аллювиальная равнина отделена от Гималаев поясом предгорий, сложенных из отложений упомянутой выше третичной сиваликской формации, достигающей, как уже сказано, более 4800 м мощности. При этом важно, что песчаники и глины нижнесиваликских слоев не отличимы от современных речных отложений Индо-Ганга, а конгломераты сиваликской толщи похожи на галечники современных долин Гималаев. Вполне правдоподобно, что они точно так же относятся к древним речным отложениям, впоследствии захваченным дислокацией. Все эти породы, включая и отложения, подлежащие Гангу — речные толщи, мы в праве рассматривать как продукты размыва Гималаев. Огромная мощность этих слоев, равная 4800 м, вместе с однообразием свиты указывает на процесс медленного погружения местности во время отложений этих пластов, как это происходит и в геосинклиналях. Этот процесс был прерван продолжением орогенезиса, создавшим в сиваликской толще несимметричные складки и ряд сбросов. После этого процесс образования осадков передвинулся еще к югу, где создалась современная долина Индо-Ганга. В ней процесс опускания продолжался в ослабленной форме.

Что означают все эти факты? Перед нами очевидно древняя речная долина, охватывающая своим существованием и третичное и четвертичное время. Мощность речных отложений этой долины превышает 5000 м, причем 4800 м падает на третичное время. Характерной чертой этих отложений, носящих типично речной характер, является то, что отложение столь большой толщи их могло произойти только при условии постепенного прогиба содержащей их долины, т. е. здесь имело место такое же опускание территории, какое мы обычно приписываем геосинклиналям.

В предыдущем изложении мы сказали, что должна очевидно существовать какая-то связь между геосинклиналями и наземными аллювиальными равнинами. Приведенный нами только что пример как будто подтверждает существование этой связи. Перед нами толщи аллювиальных отложений Ганга и в генезисе своем они тесно связаны с геосинклиналью Гималаев. Связь эта, повидимому, рисуется так. Внутренними силами поднята была в конце третичного периода горная цепь Гималаев и стала почти немедленно подвергаться энергичной денудации, в результате которой и создались мощные толщи сиваликских отложений. Таким образом, в рассматриваемом нами

примере геосинклиналь сменилась во времени аллювиальной равниной через промежуточную фазу создания гор, хотя едва ли правильно называть это вместе с Грабау миграцией геосинклинали.

Возвратимся к тому общему вопросу о связи геосинклиналей наземных аллювиальных равнин, который нами поставлен как основная тема нашего изложения. Мы говорили, что аллювиальные древние равнины это — порождение гор и их оледенений, а, с другой стороны, мы знаем, что сами горы представляют собою детище геосинклиналей. В только что рассмотренном примере сиваликского района мы увидели, однако, также другую связь и сходство этих образований: оказалось, что аллювиальная равнина представляет как бы продолжение геосинклиналей и что в ней так же, как в геосинклинали, происходит процесс энергичного отложения осадков, сопровождаемый прогибом местности, составляющим продолжение его тектонических движений и, так сказать, один из его этапов. С известной точки зрения, соответственно только что сказанному, аллювиальную равнину у края горных цепей с мощными осадками можно рассматривать как своего рода продолжение геосинклинали. В связи с этим невольно приходит в голову такая постановка: нельзя ли данную проблему перевернуть и, подойдя к вопросу в ином хронологическом аспекте, рассматривать геосинклиналь как порождение и продолжение аллювиальной равнины. Такая постановка диктуется следующим элементарным рассуждением. Ведь реки вносят свои отложения в моря и, следовательно, неизбежно в каком то проценте отложенные ими материалы должны участвовать и в создании толщи геосинклинальных отложений. Естественно, что усиленная эрозия и аккумуляция материалов, производимые работой реки, должны привести к большому выносу этих материалов в море. Ясно, что если река будет отлагать колоссальную толщу осадков на огромной площади, то это неизбежно должно дать и большой вынос осадков в море. На примере Индо-Гангской аллювиальной равнины мы видели порядок величины мощности материковых аллювиальных толщ. Она выражается километрами. Очевидно, если в известный промежуток времени река в состоянии в своем течении отложить по мощности целые километры своих отложений, то есть полное основание ожидать, что такие километры отложит она и в устьевых лагунах своих, а частью и в открытом море; здесь уже — переход от аллювиальной равнины к геосинклинали. Таким образом, основание к тому, чтобы рассматривать геосинклиналь как продолжение наземной аллювиальной равнины имеется.

Это дает нам основание поставить вопрос о сравнительной мощности геосинклинальных осадков и аллювиальных материковых.

Если мы обратимся к геологическим периодам прошлого земли, то в оставшихся от них толщах пород мы найдем целый ряд мощных отложений материкового происхождения, опровергающих своим существованием широко распространенный предрассудок, будто континентальные отложения всегда должны быть маломощными. В качестве примера этих мощных толщ можно указать песчаники Даларна и Колорадо в эозое, древний красный песчаник, песчаники Гаспе и касткильские в девоне, песчаники каргалинские и Карроо в пермской системе; песчаники боамские в третичное время и пр. С каждым из этих названий связана мощная толща пород, достигающая многих сотен и даже нескольких тысяч метров.

Порядок цифр этой мощности тот же, что порядок мощностей толщ геосинклинальных, что можно видеть из таких цифр:

ГЕОСИНКЛИНАЛЬНЫЕ ТОЛЩИ		МАТЕРИКОВЫЕ ОТЛОЖЕНИЯ	
После-гуронской складчатости			
Кембрийские и силурийские слои Уэльса	13 000 м	Песчаники Дала	800 м
		Песчаники Колорадо	4 000 »
Кембрий и силур Богемии	2 000 »		
После-каледонской складчатости			
Девон Арденн	6 000 м	Old Red (Шотландия)	7 000 м
Карбон Донецкого бассейна	12 000 »	Магадыа	3 000 »
Карбон Кузнецкого бассейна	7 500 »	Касткильские песчаники	2 500 »
		Песчаники Гаспе	2 000 »
После-варисцийской складчатости			
Юрские и меловые отложения Кавказа	9 км	New Red Sandstone	сотни метр.
		Песчаники Карроо	2 000 м
		Каргалинские песчаники более	1 000 »
		Пестрые песчаники триаса	
После-альпийской складчатости			
		Толщи Сивалика	4 800 м
Неизвестны		Боамские песчаники Семиречья	3 000 »

Какие заключения позволяет сделать эта таблица? Она позволяет сказать, что толщи осадков в геосинклиналях мощнее, чем самые мощные накопления аллювиальных отложений, но зато и длительность их создания дольше. Так, после гуронской складчатости аллювиальные накопления песчаников на материках вокруг горных хребтов создались уже в эозой, отложение же геосинклинальных толщ продолжалось еще в кембрий и значительную часть силура; равным образом, после-каледонской складчатости материковые накопления ясно выражены среди толщ девона, геосинклинали же продолжали накоплять отложения еще в карбон и т. п.

Очень рельефно для этих огромных материковых толщ приуроченность их создания к тем фазам жизни земли, которые наступали тотчас после фаз горообразования, что видно из такой таблицы, где слева, как первый этап, указывается поднятие горной цепи, а как второй — усиление оледенения:

I. Гуронская складчатость (альгонкское время)	Формация уикар и хуар С. Америки. Торридонский песчаник Шотландии, песчаники докембрия Балтийского щита (олонецкие) и Украинской кристаллической полосы (овручские).
II. Усиление оледенения	
I. Каледонская складчатость (силур, начало девона)	Девонский.
II. Усиление оледенения	
I. Киммерийская складчатость (триас — начало юры, конец юры — начало мела)	Содержащие флору европейские третичные песчаники материкового происхождения, ханхайские отложения в Азии и пр.
II. Усиление оледенения	Сиваликские отложения, боамские песчаники и пр. (неогеновый намыв). Древний аллювий речных систем.

Из приведенной таблицы совершенно ясно, что отложения данных материковых толщ всегда следовали за фазами поднятия крупных систем горных цепей.

Вовсе нетрудно убедиться вместе с тем, что в каждую геологическую фазу они располагались всегда в ближайших окрестностях горного поднятия данной эпохи, окаймляя его по периферии. Если мы посмотрим на приводимые дальше фиг. 1—4, то на них мы увидим эту картину совершенно четко. В Западной Европе, в докембрий и девон, эти материковые мощные толщи группировались по всей периферии Фенно-Скандинавского, а также по периферии Украинского щита; в пермь и триас они были расположены по периферии Среднегерманских гор варисцийского возраста. Наконец, в третичное и четвертичное время они были приурочены к подножью гор альпийской системы.

Мощность этих пород, с одной стороны, и их расположение по периферии горных цепей довольно определенно решает вопрос об их генезисе. Едва ли можно, идя вслед за Иог. Вальтером, считать эти породы создавшимися в пустынях, ибо пустыни никак не смогут объяснить ни мощности этих пород, ни их расположения у подножья горных систем.

В отношении мощности пород сейчас определенно выяснено, что эоловые отложения большой мощностью не отличаются, ветер не может, стало быть, создавать большой мощности толщ. Старая легенда, ведущая свое происхождение от Рихтгофена, об эоловом лёссе в Китае мощностью в 200 м сейчас оставлена, ибо недавно вполне выяснено, что за лёсс здесь принима-

лись породы, ничего общего с лёссом не имеющие. В общем, мы в праве сказать на основании тех данных о пустынях, которые имеются в литературе, что если мы находим в породах пустыни какие-нибудь мощные толщи отложений, то это отнюдь не эоловые отложения и не отложения временных силевых пустынных потоков, имеющие всегда и ограниченную мощность и не менее ограниченную область распространения. В связи с этим возникновение колоссальных толщ континентальных отложений едва ли возможно объяснить эоловыми процессами, происходящими в пустыне даже в том случае, если дополнить их результатами работы редких временных потоков пустыни.

Добавим к этому, что эоловое происхождение этих материковых толщ не могло бы нам никак объяснить их связи с горными цепями в смысле расположения по периферии последних.

Таким образом, если учесть оба эти обстоятельства, то мы должны признать, что мощные материковые отложения могли быть созданы только водою. Поскольку территориально они связаны с горами, ясно, что их создание обусловлено размывом горных цепей, так что самые толщи создались за счет этого размыва.

Третьим важным условием, объясняющим огромную мощность пород в отдельных местах, является медленное погружение тех территорий, на которых данные отложения откладывались.

Огромные древние аллювиальные площади, создавшиеся за счет сноса материалов с гор и выноса их на прилегающие равнины, естественно, лучше всего пополнялись материалом, когда наибольшей высоты достигают горы. Это видно из того факта, что хронологически эти равнины следовали, как мы видим, за фазой поднятия гор. Отсюда мы можем сделать дальнейший вывод, заключающийся в следующем. Поскольку максимальное поднятие гор всегда приводит и их оледенению, мы в праве считать, что часть древних аллювиальных равнин в своем генезисе была связана с эпохой развития горных оледенений на высоко вознесших свои вершины горах. Это тем более естественно, что аллювиальные равнины только и могли создаться при условии достаточного обилия вод в реках, а его давали ледники горных цепей. Естественно, в связи с этим, наши аллювиальные равнины около горных цепей поставить в связь с оледенением этих горных районов. Мы знаем, однако на основании опыта четвертичного времени, что увеличения оледенений горных районов хронологически совпадают с такими же увеличениями оледенений полярных. В связи с этим уместным является допущение, что и в до-четвертичные фазы истории земли имелась такая же связь аллювиальных равнин с полярными оледенениями. Эту связь нетрудно проследить.

Начнем с пермского периода.

Ледниковые отложения этого времени мы находим в Южной Африке, в средней части Трансвааля в пределах плато Палала. На коренных архейских породах здесь видны длинные шрамы ледникового происхождения, причем поверхность пород является гладкой, довольно хорошо отполированной. Повидимому ледниковые покровы двигались в это время на восток, юг и запад, т. е. от Центрального Трансвааля на Наталь, Капландию и область Намаква. Господствующее направление движения было повидимому движение с ССВ на ЮЮЗ. Остатком от этой ледниковой эпохи являются слои так называемого конгломерата Двика (Dwyka), имеющие у Кимберлея мощность от 2 до 6 м, у Ференгипса — около 16 м, у Оранжевой — около 100 м, на югозападном берегу пустыни Карроо — 300 м и в Натале — 400 м. На юг мощность этой поддонной морены в общем слабеет, покрытые шрамами валуны становятся реже, в породе появляется вместе с тем слоистость — сланцеватость, а затем в пустыне Карроо ледниковые конгломераты в горизонтальном направлении сменяются красными песчаниками. Сверху конгломерат Двика покрыт слоями Эка, которые представляют собою песчаники послеледникового возраста, являющиеся продуктом таяния льда и отложений озер. В Индии, на северовостоке и востоке Декана, находим сходные явления: покрытые шрамами поверхности скал, прикрытые местами сверху так называемыми талчирскими конгломератами, содержащими валуны. Ледниковые «глины» эти тянутся отсюда к Соляному кряжу. Рядом с этими породами, так сказать бок-о-бок с ними, имеются мощные отложения конгломератов наземного происхождения, но без валунов. Это, очевидно, есть остатки окололедниковых огромных речных долин. Часть талчирских слоев, прикрывающая морену сверху, относится к отложениям речного и болотного типа, но уже к послеледниковым.

На основании приведенных данных мы видим, что фактический материал подтверждает предположение наше о связи древних морен с обширными площадями водных и, очевидно, по преимуществу речных отложений для пермского времени.

Девонское оледенение южной Африки, открытое Роджерсом, не дает в этом отношении ни положительных, ни отрицательных указаний.

Переходим теперь к еще более раннему времени.

Еще раньше находим оледенение в кембрийском периоде в Скандинавии. Здесь в районе Варангер фиорда у Нордкапа имеются ясные следы ледниковых отложений в виде типичного пепельно-серого моренного конгломерата с валунами. Эта «глина» в горизонтальном направлении переходит в песча-

ники континентального происхождения, что для нас очень важно. Под нею залегает, очевидно, гораздо более древний песчаник, несущий на себе следы параллельных борозд и выглаженности ледников.

В Австралии Вальтером Гаучином найдены были в основании нижнего кембрия ледниковые отложения в окрестностях Аделаиды. Они известны на протяжении 480 км. Мощность их 100 м. Валуны очень типичны и не оставляют никакого сомнения в их ледниковом происхождении. Лежащие ниже мощные толщи кварцитов не несут на себе никаких следов полировки. Мне думается, что это совершенно понятно. По аналогии с аллювиальными равнинами четвертичного времени мы должны считать, что песчаные отложения, связанные с такими равнинами в месте непосредственного соприкосновения с ледником, должны подлежать донной морене оледенения. Таким образом, подлежащие кварциты именно и создались за счет песков, вынесенных водными потоками впереди ледника и лишь впоследствии прикрытых ледником при его движении. На этих рыхлых тогда породах ледник естественно не мог оставить своих следов. Движение льдов, по Гаучину, происходило здесь на север.

Следует далее указать развитие здесь ледниковых отложений, обнаруженное Кульманом в нижнегуронских отложениях Онтарио в Канаде. С ними связаны огромные накопления обломочных пород, к которым относятся колоссальной мощности (до 5 000 м) кьюноские песчаники и конгломераты.

Приведенный нами фактический материал о материковых оледенениях разных периодов дает как-будто, в особенности для пермского времени, подтверждение вывода о связи оледенений с толщами отложений материковых песчаников.

Что из этого следует. Мне думается, что следует вот что. Огромные аллювиальные равнины четвертичного времени связаны в генезисе своем с фазами усиления оледенений горных и материковых; судя по приведенным фактам, эта же связь имела место в отношении аллювиальных равнин более ранних фаз истории земли. Очевидно, сами эти обширные равнины так же, как горообразование и следующее за ним оледенение, представляют собой явления, периодически повторявшиеся в истории нашей планеты.

Если мы сопоставим на картах области древних материковых песчаников — Old Red, New Red и пр., о которых мы говорили в предыдущем изложении, с аллювиальными равнинами четвертичного времени, то мы в согласии с вышеизложенным увидим, что они занимали аналогичные положения по отношению к горным хребтам и районам материковых оледенений.

Штилле отмечает, как особую черту германотипного горообразования и германотипного отложения осадков, огромные массы местных накоплений отложений, большею частью красного цвета, примерами чего могут служить: послекаледонской складчатости — Old Red, а послеварисцийской — красный мергель, пестрый песчаник, New Red и пр.[1] Я полагаю, что германотипный тип горообразования здесь не при чем, ибо речь идет не о продуктах собственно горообразования, а об аллювиально-пролювиально-делювиальных, преимущественно же именно об аллювиальных толщах, сопровождающих горные хребты. Почему же тогда в альпинотипном типе горообразования этих образований нет? спросит нас сторонник Штилле. На это я возражу: аналогичные продукты и там определенно имеются, но только мощность их гораздо меньше и потому они не замечались и с «германотипными» песчаниками не сопоставлялись. Что касается малой мощности этих образований в альпинотипных районах и в альпинотипную фазу, то она просто объясняется тем, что альпийская дислокация и соответствующая ей диастрофа в истории земли была еще очень недавно, составляя своего рода вчерашний день нашей планеты.

Мы живем сейчас, стало быть, в самом начале определенной эпохи в жизни Земли, начало которой отмечено горообразовательными вспышками, причем может быть эти вспышки еще не окончились даже, и мы живем только в один из относительно небольших перерывов горообразовательных поднятий.

Рассмотренный нами материал позволяет обратиться к освещению вопроса о связи геосинклинальных толщ в их генезисе с толщами аллювиальными.

Вернемся в связи с этим к геосинклиналям.

Начнем с той таблицы, сопоставляющей мощности геосинклинальных и материковых толщ, которая была дана выше. Из этой таблицы, как я указывал уже, видно, что мощности материковых толщ и толщ геосинклинальных представляются величинами более или менее одного порядка.

Однако, эти данные лишь дополняют новым штрихом то, что достаточно хорошо обосновал изложенный выше фактический материал о горных цепях прошлого и их связи с материковыми толщами. Мне думается, что на основании изложенного мы в праве считать, что образование огромных аллювиальных равнин повторялось в истории Земли неоднократно, и что эти равнины всегда были связаны генетически с оледенениями и их усилениями

[1] Stille. Formenfolgen der Tektonik etc., p. 60.

и с количественной стороны представляют собою явления вполне сравнимые. Это их сближает. Далее, создаются или по крайней мере начинают создаваться и те и другие толщи примерно в одни и те же эпохи. Перерыв в создании геосинклиналей, время прекращения отложения осадков в них падает на фазы орогенеза, когда создаются горные цепи, но в эти же фазы орогенеза нет и размыва горных цепей, ибо последние еще не выдвинулись по высоте, и, следовательно, в эту фазу нет накопления наземных толщ. Поскольку мы знаем уже, что толщи материковых песчаников являются толщами водного, т. е. преимущественно речного происхождения, мы в праве сказать, что толщи материковых песчаников и толщи геосинклинальных морских отложений одинаково откладываются водою, в первом случае наземной и, главным образом, речной, во втором — морской. Здесь встает, однако, такой чрезвычайно важный вопрос: имеют ли что-нибудь общее между собой по составу эти отложения геосинклиналей и отложения древних аллювиальных равнин? Этот вопрос является вполне естественным, раз те и другие толщи одинаково создаются в эпохи размыва горных цепей. Очевидно при этих условиях невольно должна явиться мысль об известной близости состава складывающего их материала.

Предыдущие данные привели нас вплотную к мысли, что один и тот же процесс размыва и сноса суши, только что обновленной геоморфологически поднятием гор, привел к созданию материковых толщ и к закладке геосинклиналей путем отложения в них мощных морских образований; при этом и то и другое отложение осадков сопровождалось прогибом территорий, на которых осадки эти откладывались.

Для того, чтобы убедиться в этом, просмотрим основные геосинклинали прошлого земли, начиная с наиболее давних моментов ее истории, и постараемся осветить связь геосинклиналей с размывом горных цепей так, как мы выше выяснили связь с тем же размывом для наземных аллювиальных равнин. Начнем сейчас рассмотрение с Западной Европы, а затем перейдем к востоку ее.

В докембрий, как мы видели, мощные континентальные отложения группируются вокруг Канадского щита, Фенно-Скандинавского щита, Украинского кристаллического массива, приурочиваясь к их периферии. Если мы взглянем на карту, то мы увидим, что вокруг Фенно-Скандинавского массива мощные накопления песчаников имеются на юго-западе — в Швеции и Шотландии и на востоке нашего Союза. Их нет на юге от массива в Германии и нет на западе в Норвегии (см. фиг. 1 на стр. 13). Что это означает? Почему они расположены не по всей периферии, а по южной и

и западной определенно отсутствуют? Можно, конечно, предположить, что они скрыты под дном нынешнего Балтийского и Немецкого морей, но проще и естественнее думать, что материковых толщ в этих районах не было потому, что здесь находилось море, где откладывались морские отложения, скрытые ныне под более поздними толщами. Этому предположению отвечает мысль геологов, помещающих здесь уже в кембрий геосинклинали. Одна из них проходит через Уэльс, Арденны, Тюрингию и Польшу. Хронологически она составляла продолжение такой же геосинклинали докембрия.[1] Границу этой геосинклинали с юга составляли Арморикапский и Богемский массивы, которые имели вид островов, так что на юг от них геосинклиналь продолжалась. О мощности отложений в этой геосинклинали дают понятие такие цифры.[2] Кембрийские отложения Уэльса имеют мощность от 8 до 10 тысяч метров; к этому надо прибавить до 4 тысяч метров силура. Мощность кембрия и силура в Арденнах не меньше, но она не может быть определена точно, так как основание толщи не достигнуто. Довольно мощны эти отложения также в Тюрингии, Саксонии и Польше.

В южной Пражско-Пильзенской геосинклинали мощность отложений кембрия и силура равна 2 000 м. Другая геосинклиналь — Грампианская протягивалась повидимому из Ирландии через северную Шотландию на северо-восток через западную Скандинавию и дальше на север. В ней толщи кембрия и силура также имеют большую мощность.

Из приведенных данных мы видим, что высокие горы альгонкской эры, очевидно разрушившиеся в течение кембрия и силура, были на своих окраинах окаймлены или толщами мощных материковых песчаников наземных аллювиальных равнин или такими же мощными толщами отложений геосинклиналей (см. фиг. 1 на стр. 1009). Не наводит ли этот факт на мысль, что источник и тех и других толщ был один и тот же — денудация горной цепи? Если это предположение правильно, то, очевидно, в толще геосинклинальных осадков должны преобладающую роль играть отложения терригеновые. Мы действительно находим в толщах кембрия Уэльса преобладание красных песчаников, глин, глинистых сланцев; то же самое относится и к силуру того же района, где только к концу периода появляются известняки. Преобладание сланцев характерно для кембрия и силура Арденн. В Тюрингии и Саксонии кембрий представлен филлитами, силур же — песчаниками и сланцами, переслаивающимися с диабазами (пластовые интрузии). Наконец,

[1] Haug. Traité de Géologie, p. 603.
[2] Ibid., p 602.
[3] Haug, op. cit., 635.

в Польше песчаники и подчиненные им сланцы сменяются нижне-силурийскими известняками, за которыми следуют сланцы верхнего силура. Что касается Грампианской геосинклинали, то в ней среди преобладающих песчаников и сланцев имеются слои известняков и доломитов, т. е. отложений уже не

Фиг. 1. 1, 6. — Горы архейско-альгонкского времени (6 — гипотетич.); 2, 4 — материковые песчаники (древние аллювиальные равнины) (2 — гипотетич.); 5 — морские отложения альгонкского времени в Зап. Европе; 3 — области геосинклиналей Зап. Европы. ——— линия Карпинского.

терригеновых. Однако, терригеновые отложения преобладают. Приведенный фактический материал таким образом определенно показывает нам огромное преобладание отложений терригеновых среди отложений геосинклинали; иными словами, это означает глубокое сродство отложений геосинклинальных и материковых толщ. Очевидно, огромный снос материалов с суши создал и эти мощные материковые толщи, и за его же счет создались затем накопления осадков в геосинклиналях.

Еще рельефнее выступает аналогичное положение для девона.

Фенно-Скандинавский щит в эту эпоху оказывается, как мы уже говорили, очень рельефно окруженным со всех сторон накоплениями континен-

Фиг. 2. 1, 4. — горы девонского времени и суша (4 — гипотетич.); 2, 5 — материковые песчаники древних аллювиальных равнин (5 — гипотетич.); 3 — мелководный морской девон; 6 — отложения геосинклиналей. — — — линия Карпинского.

тальных песчаников (см. фиг. 2 на стр. 1010). Нет этих песчаников только с южной стороны, т. е. в Германии. В чем причина этого? Повидимому в том, что Германия в эту фазу была покрыта морскими водами. Здесь находилась

арденно-рейнская зона и область довольно глубокого моря, если судить по карте у Ога.[1] Д. Н. Соболев и некоторые другие исследователи прямо говорят о северной геосинклинали, которая проходила в общем через всю Европу от Голландской впадины на восток к Польше.[2] Д. Н. Соболев отмечает, что между Голландией и районом Аахена имеются признаки материковых песчаниковых толщ, на остальном же пространстве они сменяются морскими отложениями. Если мы взглянем на нашу карту, изображающую территориальное взаимоотношение горного района, с одной стороны, и геосинклинали, а также места накопления наземных песчаников, с другой, то мы увидим, что геосинклиналь занимала положение, аналогичное наземным аллювиальным равнинам, т. е., местам отложения материковых песчаников: она также находилась у края гор. Иначе говоря, это определенно указывает на то, что терригеновые отложения должны были вноситься в нее в большом количестве, т. е. что она в значительной мере заполнялась теми же толщами песков, сносившихся с денудируемых гор, как и наземные толщи. Это в самом деле подтверждается и анализом состава толщи девона этой геосинклинали. Девонские осадки начинаются относительно мелководными песчаными отложениями и переходят затем в более глинистые слои. В средний девон имеются известняки, но затем они сменяются вновь отложениями терригенового типа. Вот чем заполнялась зачинавшаяся девонская геосинклиналь. В карбон здесь видны те же две геосинклинали, что и для девона.[3] Максимуму развития геосинклинали отвечает в карбон отложение, известное под именем кульма, и выше его имеются очень мощные лишенные фауны песчаники.

Что показывают эти данные? Мне думается, они говорят, что мощные толщи материковых отложений и такие же толщи отложений геосинклинальных имели в основе один и тот же источник — толщи, снятые денудацией с гор. Разница получалась лишь в том, что к этим терригеновым осадкам моря примешивался некоторый процент органогенных морских отложений и, кроме того, в том, что на морском дне эти отложения могли подвергаться дальнейшей складчатости, в то время как на суше они, попадая на уже консолидированный материк, могли, самое большое, заставлять его прогибаться вниз.

Перейдем к пермскому и триасовому периодам.

Здесь мы увидим ту же картину наполнения геосинклинали терригеновыми осадками горных хребтов. Крайне поучительно в этом смысле поло-

1 Haug. Traité de Géologie, t. II, p. 684.
2 Д. Н. Соболев. Об эйфельском и рейнском девоне и о тектонике Европы. Варш., 1912.
3 Haug. Op. cit., p. 765.

жение Среднегерманских гор. На север от них находились огромные площади материковых толщ New Red и пестрого песчаника, а на юг от гор совершенно на том же расстоянии от них находилось море, превратившееся вскоре в геосинклиналь (см. фиг. 3 и 4 на стр. 1012 и 1013). Не ясно ли

Фиг. 3. 1 — горы. пермского времени; 2 — материковые песчаники древних аллювиальных равнин; 4 — области не геосинклинальных отложений пермского моря; 3 — области геосинклиналей. — — — линия Карпинского.

здесь совершенно, что и то и другое накопление мощных толщ создано одной и той же причиной — сносом с горной цепи в обе стороны продуктов денудации. Иначе говоря, материал и там и здесь один и тот же, но в одном случае (на юге) он отложился под водой, в другом (на севере) — прямо на суше.

Поучительно здесь следующее. В области северных Альп на значительном пространстве господствует тот же тип пермских отложений, что и в Германии, т. е. грубые песчаники разных цветов и сланцы с раститель-

ными остатками. Они достигают местами огромной мощности. Южнее начинается зона открытого моря, которое до варисцийского горообразования, т. е. в первую часть пермского периода, откладывало известняки, а во вторую часть начало откладывать, главным образом, конгломераты и песчаники. Триас представлен здесь, главным образом, известняками и доломитами, обра-

Фиг. 4. 1 — горы триасового времени; 2 — материковые песчаники древних аллювиальных равнин; 4 — не геосинклинальные отложения моря; 3 — области геосинклиналей.

зующими толщу в 2 000 м. Геосинклиналь резко обозначается в юрскую фазу, причем главными отложениями в ней являются глинистые сланцы или мергеля, либо мелкозернистые плотные известняки. Наконец, в меловой период в геосинклинали откладывались мергеля и известняки с аммонитами.

Мы в основных чертах рассмотрели данные, относящиеся к Западной Европе, и, как мне кажется, получили весьма поучительный материал. Оказалось прежде всего, что море в окрестностях размываемой энергично

горной цепи получает огромное количество терригеновых материалов; оказалось дальше, что осадки геосинклиналей — это вообще большею частью осадки терригеновые. Наконец, весьма поучительно, как в течение геологической истории Западной Европы к югу перемещалась, как это отметил впервые М. Бертран, область геосинклиналей, и вместе с этим перемещались с севера на юг все описываемые явления. Так, в результате создались три части Европы — палео-Европа, мезо-Европа и нео-Европа по схемам Кобера, Штилле и др.

Выяснившееся нам положение с геосинклиналями бросает в частности свет на одно очень любопытное обстоятельство. Всем известна карта геосинклиналей, составленная Огом и повторяемая во всех учебниках: узкие ленты геосинклиналей змеями тянутся между материковыми массами, в состав которых входят и современные материки и современные океаны. В этой карте много искусственного. И прежде всего странно поражают эти сплошные ленты прогибов. Из нашего анализа следует, что на деле этих сплошных прогибов не существует, а имеются совершенно отдельные, иногда плохо соединенные друг с другом, а иногда и вовсе не соединенные морские впадины. Места их возникновения обусловливаются местами существования высокой размываемой водами горной страны и зависящим от этого интенсивным прогибом соседней гибкой области. Вблизи такой страны геосинклиналь в море должна неизбежно создаться; если большого отложения осадков и, как предпосылки его существования, размываемого горного кряжа нет, то не создается и геосинклинали. Таким образом, червеобразно извивающейся через всю землю геосинклинали нет, а есть отдельные геосинклинальные бассейны, иногда соединяющиеся друг с другом, а иногда и вполне обособленные, и это надо твердо помнить. Если что-то мистическое и не совсем понятное крылось в этой единой геосинклинали, то распад ее на отдельные вполне конкретные бассейны нельзя не приветствовать. Этот теоретический шаг давно уже собственно сделан американцами, и пожалуй его лучшую формулировку дал Шухерт, который нашел несколько различных конкретных типов геосинклиналей.

Перейдем теперь к восточной Европе, где условия были существенно иными, чем на западе. Основная предпосылка этого различия сводится к тому, что здесь с давних пор расположена огромная платформа — так наз. Финнокандии или арх-Европы. Вследствие этого, территория, оставшаяся не консолидированной и способной к сгибанию в складки, оказалась здесь сильно суженной и представлена, кроме альпийского, суженным гер-

цинским поясом. По той же причине на территории Кавказа, напр., мы видим, что все три основные фазы складкообразования — каледонская, герцинская и альпийская почти налегли друг на друга, ибо совершались на одном и том же небольшом участке земли.

Перейдем к этому району и начнем наше рассмотрение с Кавказа, где проявились три основные последние фазы складкообразования.

Наши сведения о характере проявления каледонской и герцинской дислокаций на Кавказе очень отрывочны.[1] Древне-каледонская фаза складчатости северного склона выражена несогласным залеганием известняков и частью сланцев верхнего силура на метаморфических сланцах силура нижнего. О неокаледонской дислокации говорит отчетливое несогласие в налегании пород верхнего и среднего карбона на эопалеозой. К сожалению, на Кавказе нет палеонтологически охарактеризованных отложений девона и нижнего карбона, что мешает точно выяснить возраст этих движений.

На границе среднего и нижнего карбона начались проявлении варисцийской дислокации, в которой дальше можно насчитать несколько фаз.

Значительно более подробно мы можем восстановить для Кавказа хронологию альпийской складчатости, для которой насчитывают до 12 фаз. В отличие от Западной Европы, где каждая следующая по возрасту фаза дислокаций сдвинута к югу по сравнению с предыдущей, здесь, как я указал уже выше, все три основные дислокации — каледонская, варисцийская и альпийская происходили в общем на одном и том же участке, так что Кавказский хребет, относящийся по существу, говоря терминами Штилле, к альпинотипной области, оказался включенным в окраину зоны германотипной[2].

Размеры альпийской геосинклинали Кавказа? На севере они были ограничены Предкавказской плитой, на юге плитой Закавказской — Куринско-Рионско Азербайджанской, мезозойские осадки которых носят неритический характер. В мезозойское время на месте Кавказа находился таким образом узкий геосинклинальный бассейн между двумя жесткими названными выше плитами.[3] Границы этой геосинклинали очерчиваются так.

[1] В. П. Ренгартен. Тектоническая характеристика складчатых областей Кавказа, Тр. Всесоюзн. Съезда Геол., 21 сент. 1928 г., вып. 21, Ташкент, 1930.

[2] См. чертеж в статье Штилле. Stille. Formenfolgen der Tektonik in Mitteleuropa und Zentralasien. Тр. III Всесоюз. геол. съезда 1928 г., вып. I, стр. 62, 1930.

[3] Argond. La tectonique de l'Asie. Compte rendu du XII Congrès Géol. Intern. 1922. Liège 1924, p. 257. — R. Staub. Tektonische Beobachtungen am Westufer des Kaspischen Meeres. Vierteljahrschrift d. Naturf. Ges. in Zürich, Bd. 58, 1913, p. 252. — В. П. Ренгартен. Цит. соч., стр. 203.

На западе они кончались за Каспием, где мы находим единую Закаспийскую плиту, уже не разделенную геосинклинальной депрессией, как Предкавказская и Закавказская плита[1].

На западе эта геосинклиналь заканчивалась около Крыма, где нерити-ческие отложения Рионской плиты соединялись с такими же отложениями Крыма[2]. Можно сказать, что с юга и с запада Кавказская геосинклиналь была ограничена Закавказско-Таврической жесткой плитой. Вильзер соединял эту Закавказско-Таврическую область под именем Понтического массива с Подольским и Валахским массивами на северо-западе.[3] В совокупности это и была значительная часть той суши, которая окаймляла Кавказскую геосинклиналь. Она складывались таким образом из Закаспийской плиты Закавказско-Крымской (Понтического массива), Подольского массива и плиты Предкавказской. По Вильзеру связь Кавказской геосинклинали с Тетисом осуществлялась только на юго-востоке, на северо-западе она замыкалась указанными массами.[4] В. П. Ренгартен возражает против этого и говорит, что Кавказский бассейн имел достаточно свободное сообщение с западноевропейскими морями.[5]

Обратимся к мощности отложений этой геосинклинали. Они больше 9 км, причем юрские отложения превышают по своей мощности меловые раз в пять. При этом в толще пород около 80% отложений имеют терригеновый характер и лишь 20% приходится на органогенные отложения. К первому типу относятся глинистые сланцы и песчаники, ко второму известняки, доломиты и мергеля.[6] В. П. Ренгартен прямо говорит о материалах, «прошедших с текучими водами длинный путь по континенту» и могущих в море уноситься довольно далеко от берега. В. П. Ренгартен определенно подчеркивает, что за период времени от лейаса до келловея к северу от Кавказского бассейна существовал «обширный континент, откуда и сносились терригеновые материалы»,[7] которых набралось на 6 км. Период верхней юры представлял перерыв в отложении терригеновых толщ. В. П. Ренгартен

[1] В. П. Ренгартен. Цит. соч., стр. 205.

[2] В. П. Ренгартен. Там же, стр. 207. В противоположность этому Вильзер говорит об единой Крымско-Кавказской длинной и узкой впадине. — Wilna. Die tektonische Stellung des Kaukasus und dessen Beziehungen zu Europa. Zeitschr. d. Deutsch. geol. Ges., Bd. 80, 1928, p. 174.

[3] Op. cit.

[4] Wilser. Die stratigraphische und tektonische Stellung der Dobrudscha und die Zugehörigkeit des Balkangebirges zu den nordatlantischen Ketten. Geol. Rundschau, Bd. XIX, 1928, H. 3, p. 216

[5] В. П. Ренгартен. Горная Ингушетия. Тр. ГГРУ, вып. 63, 1931, стр. 109.

[6] В. П. Ренгартен. Цит. соч., стр. 110.

[7] Там же, стр. 110.

ставит его в связь с верхне-юрской трансгрессией, которая покрыла своими водами значительные территории на юге Русской платформы. В Кавказской геосинклинали в это время происходили тектонические процессы, вызвавшие неустойчивость фаций и перерывов в серии отложений.[1] В меловой период находим новое усиление приноса терригеновых материалов с северной суши. Очевидно, объяснить накопление этих терригеновых толщ в Кавказской геосинклинали можно, только допустив существование в области Предкавказья обширной континентальной платформы, как вероятного продолжения кристаллической полосы юга России.[2] С этой-то суши и сносились в Кавказскую геосинклиналь терригеновые отложения.

Расположенная на юг Рионо-Куринская плита тоже давала, конечно, терригеновый материал, но есть основание думать, что эта суша была очень невелика, так как за нею на юг находилась альпийская геосинклиналь Малого Кавказа — зона Армении[3], соединяющаяся со складчатой системой северной Персии через Эльбрус.

Итак заполнение Кавказской геосинклинали производилось отложениями терригенового характера, сносившимися с расположенной севернее суши. Что это была за суша и почему с нее могли быть снесены такие большие толщи пород? На этой суше находился возвышенный Донецкий кряж, относящийся по времени возникновения к эпохе варисцийской складчатости. В этом кряже девонские отложения имеют мощность 300 м, каменноугольные 10—12 тысяч метров. Судя по столь значительной мощности пород, перед нами отложения опять геосинклинального типа. Известно, что Донецкий кряж в настоящее время представляет совершенно почти сглаженные горы, имеющие местами в связи с длительной материковой денудацией не только совершенно пенепленизированный, но даже обращенный рельеф. Это не мешало, однако, данным горам в свое время, именно тотчас после варицийской складчатости, иметь весьма значительную высоту. За счет их материла в значительной мере пополнялась осадками Кавказская геосинклиналь.

Каково же происхождение самой Донецкой геосинклинали? Ее история довольно ясно читается в отложившихся в ней породах. «В Донецком кряже», писал А. П. Карпинский, «мы имеем пока единственный в своем роде документ, веденный последовательно и без перерыва самой природой через весь каменноугольный период... Нигде, ни в одной стране неизвестно до сих пор

[1] Там же, стр. 111.
[2] Там же, стр. 113.
[3] В. П. Ренгартен. Тектоническая характеристика и т. д., стр. 204.

подобного по продолжительности и полноте совмещения морского и континентальных осадков, какое наблюдается в Донецком бассейне».[1] Донецкий залив то заносился континентальным материалом, то заболачивался отчасти или вполне, то опускался снова и заполнялся отложениями. В результате всего этого создалась мало по малу огромная толща пород, которую Д. В. Наливкин считает всю лагунной,[2] оценивая ее размер примерно как территорию Финского залива.[3] Откуда сносился в эту котловину материал, создавший огромную почти десятикилометровую мощность ее отложений? Очевидно или с Азовского или с Воронежского или, наконец, с Днепровского кристаллического массивов, между которыми он находился. Отметим, кстати, что вся продуктивная толща Донецкого бессейна едва достигает 2500 м; следовательно, мощность углей и известняков в ней много меньше, составляя ничтожный процент общей мощности отложений. Д. В. Наливкин делает весьма правдоподобное предположение, что Донецкий бассейн создался приносом песков и ила большой рекой.[5] Река эта, или реки, очевидно шли с указанных выше горных местностей. Как указал М. Д. Залесский, эти реки должны были нести с собою огромные массы растительного материала, который они разгружали в дельтах, в устьях, а также по пути своего течения во время широких разливов на протекаемых ими болотистых местах. Известную аналогию этого дают, по мнению М. Д. Залесского, современные реки тропического климата, как Амазонка, Миссисипи, Конго, где путешественники наблюдают феноменальные скопления плавающего леса и др. растительных остатков, которые выносились рекою в море лишь во время половодья и загромождали собою реку в остальное время.[5] Можно себе представить, насколько должны были, в свою очередь, понизиться материковые массивы вследствие происходившего размыва указанного только что масштаба. В возникшей мощной зоне терригеновых осадков Донецкого бассейна произошло образование складок, и территория Донецкой впадины стала горной местностью. Горы эти подверглись затем энергичной денудации, дав в частности материал для накопления осадков Кавказской геосинклинали.

Интересно сопоставить Донецкую геосинклиналь, относящуюся к варисцийской складчатости, с аналогичного возраста горами Западной Европы — Среднегерманскими. Чем сложены Среднегерманские горы? Девонскими и каменноугольными терригеновыми отложениями, которые

[1] Поверхность и недра, 1916, № 5, стр. 204.
[2] Д. В. Наливкин. Учение о фациях, М.—Лгр., 1932, стр. 153.
[3] Там же.
[4] Там же.
[5] М. Д. Залесский. Очерк по вопросу образования угля, Петр., 1914, стр. 82.

затем претерпели дислокацию. То же самое имеет место и в Донецком кряже с тою лишь разницей, что район этих дислокаций здесь гораздо меньше. Различие здесь, таким образом, чисто количественное и заключалось оно просто в том, что на консолидированной застывшей почве Русской платформы трудно было варисцийским дислокациям проявиться с тою резкостью, как в Западной Европе. Поэтому основная область их проявления ограничилась Западной Европой. Я напомню, однако, взгляд, выдвинутый впервые М. М. Тетяевым,[1] о том, что эта складчатость распространялась и дальше на восток, захватывая и область кристаллического массива, перекрытую в то время палеозоем. М. М. Тетяев в подтверждение своего взгляда ссылался на то, что в Донецком районе массив этот выходит из под девонских отложений как размытое антиклинальное ядро, на котором залегают палеозойские слои, срезанные поверхностью размыва, и на то, что в Западной Волыни палеозой постепенно поднимается в сторону кристаллического Украинского массива, а равно образует здесь определенные дислокации (пелчанская дислокация В. Д. Ласкарева). Этот взгляд М. М. Тетяева уже в то время находил себе опору в представлении А. П. Карпинского о линиях СЗ дислокации — линиях Карпинского.[2] Немного позже выхода первой работы М. М. Тетяева В. Д. Ласкарев[3] ту же пелчанскую дислокацию истолковал в том смысле, что кроме палеозоя она затронула и кристаллический массив. Позже значение СЗ дислокации как варисцийской (герцинской), подчеркнул я в одной из моих работ, специально посвященной вопросу о тектонических движениях Украинской кристаллической полосы.[4] Отмечу дальше интереснейшие указания В. Н. Чирвинского на разлом в кристаллическом массиве как раз по линии Карпинского, сопровождаемый выходами эффузивов.[5] Наконец, интересный шаг вперед дал недавно Н. И. Безбородько, обнаруживший определенную линию вулканизма относительно нового времени, параллельную в общем границе нынешнего кристаллического массива и тянущуюся от Нагольного кряжа через гравиметрическую ано-

[1] M. Tétiaeff. Les grandes lignes de la géologie et de la tectonique des terrains primaires de la Russie d'Europe. Annales de la Soc. Géol. de Belgique, t. XXXIX, Mémoires, 1912; он же. К тектонике Украины. Вестник Укр. Геол. Ком., в. 9, 1926.

[2] А. П. Карпинский. Очерки геологического прошлого Европейской России. Петр., 1919.

[3] В. Д. Ласкарев. Геологические исследования в югозападной России. Тр. Геол. Ком., нов. сер., в. 77, 1914, стр. 602.

[4] Б. Л. Личков. О тектонических движениях Украинского кристаллического массива и этапах развития Северо-Украинской мульды. Изв. Укр. отд. Геол. ком., вып. 6, 1925, стр. 116, 119, 120.

[5] В. Н. Чирвинский. О некоторых эффузивных породах Волыни и о зоне разлома в северозападной части Украинской кристаллической полосы. Изв. Укр. Отд. Геол. ком., вып. 11, 1928, стр. 20—21.

малию Лозовой, далее через известный вулканический выход у Исачек на район крупнейшей Черниговской магнитной аномалии.[1]

Все эти данные определенно указывают, что и здесь в восточной Европе тенденция и проявлению орогенетических сил была в эпоху горообразования в Донецком кряже, но что она не могла выявиться так рельефно, как на западе Европы по чисто местным условиям.

Подведем итоги данным, полученным нами для востока Европы. Здесь мы еще рельефнее, чем на западе, видим, что отдельные геосинклинали являются местными образованиями в морских бассейнах, местными их углублениями, причем иной раз они обнаруживают отчетливую обособленность от соседних районов. Эта обособленность обычно может быть суммирована именно как результат связи данных участков с вполне конкретными районами гор предыдущей эпохи. А в результате этим подчеркиваются четко выраженная тенденция к обособленности Донецкого бассейна, Кавказской впадины и пр., о которой не перестают говорить геологи.

В нашем обзоре восточной Европы оказался совершенно пропущенным Крым, тектоника которого относится к так называемой киммерийской фазе (андийская, австрийская и субгерцинская фазы Штилле). По своему несколько нестройному характеру тектоника Крымских гор сопоставляется геологами с неправильной, как бы отраженной складчатостью Рионской плиты.[2] Хронологически эта дислокация вставляется между Донецкой и Кавказской. Охваченные ею отложения вне Кавказа и Донецкого кряжа не носили, однако, геосинклинального характера и обладают не особенно значительной мощностью, являясь сравнимыми с такими же мощностями пород восточной части Северо-Украинской мульды, где также выразились этого возраста движения.

В виду такой малой мощности пород этого района он не представлял для нас интереса, и мы оставили его поэтому в стороне. Не мешает, однако, в связи с этим выявить один определенный факт: существование толщ пород промежуточных между многокилометровыми толщами геосинклинальных осадков и неритическими слоями в немного десятков метров мощности для известного геологического периода. Пример таких мощностей дает Северо-Украинская мульда или Подмосковный бассейн. Для характеристики мощности пород мульды сошлюсь на таблицу, которая была мною дана уже однажды в виде сравнительного сопоставления мощностей

[1] Н. И. Безбородько. Лінія вулканізму на левобережжі. Більшовіцькі темпы геологоразвіці, Десятиденна газета, 1931 г. № 7, 1932, № 1.

[2] В. П. Ренгартен, op. cit., 205.

пород Каратау, Мангышлака, Донецкого кряжа, Северо-Украинской мульды.[1]

Мощность мезозоя для Северо-Украинской мульды указана там та же, что и для Донецкого кряжа т. е. 450—500 м. в качестве средней, причем учтено, что один мел имеет в Харькове мощность не меньше 400 м. Правда, в западной части мульды эти отложения повидимому становятся менее мощными. Но в восточной части перед нами мощность осадков, хотя и не геосинклинальная, но во всяком случае довольно значительная. С этой точки зрения, быть может, есть основание данную мульду рассматривать, как многие геологи и делали, в качестве своего рода зачаточной геосинклинали, в которой выявилась лишь зачаточная дислокация, главным образом, вследствие того, что вся эта территория лежит на фундаменте из кристаллических пород, мало благоприятном для проявления тектонических явлений. Об этом свидетельствует зачаточность линий Карпинского в сравнении со Среднегерманскими горами. Я считаю необходимым отметить существование таких морских впадин с характером промежуточным между настоящим мелкоморьем (шельфом) и подлинной геосинклиналью.

Мы просмотрели основной материал по Европейскому материку и всюду видели одну и ту же картину — теснейшую связь геосинклиналей с терригеновыми осадками и заполнение геосинклинальных впадин при посредстве последних. Мы могли бы продолжить наш анализ и так же точно внимательно пересмотреть материал по другим материкам, особенно по Азии и Северной Америке. Но думается, что в этом особенной надобности нет. Я скажу лишь, что и этот материал основные наши выводы только подтверждает.

На основании изложенного выше мы можем теперь сделать заключительные выводы о том, что же такое представляли собой геосинклинальные впадины. Во-первых, ясно на основании предыдущего, что геосинклинали, наполняясь по преимуществу терригеновыми материалами, зависели главным образом от тех материалов, которые вносились в них реками. Нами выяснено дальше, что закладывались эти геосинклинали за счет приносимых реками с материка материалов как раз в те эпохи жизни земного шара, когда реки имели особенно большое обилие вод и когда они несли с собой в моря особенно значительное количество отложений. Иначе говоря, это совпадало с эпохами усиления оледенений, которые, в свою очередь, обычно следовали с фазами поднятия горных хребтов, как то было отмечено

[1] Б. Л. Личков. Материалы к характеристике фауны и стратиграфии альбских отложений Мангышлака. Тр. Геол. музея Акад. Наук. СССР, т. II, стр. 1297.

Рамзаем и Д. Н. Соболевым уже давно. Естественно при этих условиях, что закладка геосинклиналей совпадала с эпохами развития на земном шаре больших аллювиальных площадей, являвшихся следствием оледенения. Такая закладка происходила на границе докембрия и кембрия, на границе девона и карбона, в пермь и триас, и, наконец, в ледниковую эпоху четвертичного времени.

Мне думается, что древние аллювиальные равнины, собиравшие в себе огромное количество легко подвижного материала, аллювия, который затем в очень значительной степени выносился с суши в моря, представляют собой далеко не в должной мере учтенный источник терригеновых материалов в моря. Когда геологи говорят о речном типе осадков, они всегда одним из важнейших критериев этого типа выдвигают «небольшое распространение в виде узких извилистых полос.[1] При таком определении, конечно, не учитываются обширные аллювиальные равнины недавнего прошлого (Полесье, Каракумы и пр.), созданные огромными речными разливами в сотни километров шириной. Между тем ясно, что такие равнины содержат в себе очень большой материал, могущий быть вынесенным в моря. Надо думать, что дельты в морях закладываются впервые одновременно с созданием аллювиальных наземных равнин (как следствие глиптогенеза), а дальнейшее развитие их (литогенезис) происходит по мере их последующего размыва.

Если сопоставить мощность древних наземных аллювиальных отложений, с одной стороны, и геосинклинальных отложений, с другой, как это мы сделали выше на таблице, то нам бросится в глаза, что у геосинклинальных отложений эта мощность все-таки больше. При этом, однако, и время, которое охватывает накопление осадков в геосинклинали, всегда больше, чем время, в течение которого создались континентальные толщи. Очевидно, первая закладка геосинклинали происходила за счет создания больших аллювиальных равнин и одновременно с ними. Но продолжение этого процесса развивалось и тогда, когда речная эрозия, углубляясь в эти материковые толщи, создавала их размыв и вынос их материалов. Этим объясняется, вероятно, некоторый сдвиг во времени геосинклинальных толщ по сравнению с материковыми. Я позволю себе подробнее остановиться на данном сдвиге, ибо это крайне важно. Из приведенных выше фактов (см. также фиг. 1—4) видно следующее. После гуронской складчатости непосредственно отложились песчаники Дала (Даларна), Колорадо и пр., геосинклиналь же создалась только в кембрийский период. После каледонской склад-

[1] Д. В. Наливкин. Учение о фациях, стр. 41.

чатости непосредственно отложились песчаники Old Red и другие ему аналогичные, максимум же развития геосинклинали падает на карбон. К перми и триасу относится отложение материковых толщ, следовавших за варисцийскими горообразованиями, геосинклиналь же альпийская обозначилась резко и заполнялась энергично, главным образом, в мезозой. Иначе говоря, несмотря на то, что геосинклинали сложены, как мы видели, по преимуществу терригеновыми образованиями, тем не менее заполнение их осадками более или менее сложной связью связано с отложением грубо аллювиальных континентальных толщ эпох речных разливов. Очевидно, не эти толщи непосредственно или, по крайней мере, не они одни попадают в моря, выстилая их дно. Как объяснить это явление? Во-первых, размыв материковых возвышенностей водами и вынос снятых с них материалов реками не ограничивался эпохой, непосредственно следовавшей за складчатостью, а продолжался после нее постепенно еще долгое время. Мне думается, что не играет ли здесь роли еще следующее обстоятельство. С десяток лет назад Рид обратил внимание на то обстоятельство, что складкообразование и поднятие представляют собою не различные названия одного и того же явления, но что силы, их вызывающие, совершенно различны[1].

Продолжение и развитие этого взгляда находим у недавно умершего американского геолога Эд. Берри.[2] По его словам, в геологической литературе совершенно неправильно ставится знак равенства между складкообразованием слоев и поднятием гор, как будто поднятие представляет сопутствующее горообразованию явление, внезапно создаваемое силами сжатия. В последние годы именно эту точку зрения хорошо выявил Штилле.[3] По мнению Берри, точка зрения эта неправильна. Берри указывает, что во многих случаях, где поднятие следует за горообразованием, оно представляется от последнего независимым и имеет вид нескладчатого растяжения при поднятии уже сложенных в складки пород. В образовании гор складкообразование есть один этап, поднятие же — другой независимый от него этап. Во времени оба эти этапа не совпадают, и Берри думает, что поднятие цепи могло происходит на миллионы лет позже, чем складкообразование, которое могло даже сопровождаться опусканием. Их во всяком случае нельзя считать явлениями одновременными. Автор иллюстрирует свою мысль примерами. Изучая строение Альп, — указывает он, — мы находим в них

[1] H. T. Reid. Bull. Geol. Soc. Amer., 1922, vol. 33, pp. 317—336.

[2] Edward Berry. Shall we return to cataclysmal geology? Amer. Journ of Science, 1929, January.

[3] Stille. Grundfragen der vergleichenden Tektonik, Berlin, 1924.

складчатые группы пластов, а затем интервалы, охватывающие долгий период, представленные породами, не сложенными в складки. Там, где деформации повторялись, объяснить их повторение можно, только допустив самостоятельное поднятие. Такое самостоятельное поднятие Альп надо отнести на плиоцен. Другой пример. Аппалачские породы сделались складчатыми в конце палеозоя, так что выход области из под уровня моря надо приурочить к верхнему девону. Значительная часть складок образуется таким образом раньше отступания моря; затем, сделавшийся сушей район был пенепленизирован в течение мезозоя и после этого приподнят вертикальными движениями в третичное время. Поднятие отделено здесь от складчатости всем периодом мезозоя и значительной частью кайнозоя.

Берри ставит вопрос: как же найти при этих условиях ту резкую грань, которая отделяет одну от другой крупные эры развития жизни. По его мнению, единственной различимой границей является здесь начало или окончание оледенения, которое определяет границы высот и широт.

Беря эти мысли Берри за исходную точку, мы можем сказать, что закладка великих аллювиальных равнин вместе с началом оледенений отвечает максимумам поднятий, а затем наступает фаза длительной пенепленизации суши, когда они постепенно снижаются, и когда в морях происходит длительный процесс отложения осадков в геосинкиналях за счет этой самопенепленизирующейся суши.

Мы знаем, что основная масса обломочного материала в моря приносится реками; мы знаем затем, что объем материалов, приносимых такими реками, как Нил, Миссисипи, Амазонка и пр., колоссален. Известно, напр., что скорость накопления осадков в устьи Миссисипи доходит до 6 м в год, что за 100 лет дает 600, а за тысячу — уже 6000 м. Та же цифра в кубометрах для Миссисипи равняется 211 миллионам кубометров в год. Для других рек мы имеем аналогичные, хотя для большей части меньшие цифры.

Янцекианг	182 милл. куб. м
Ла-Плата	44 » » »
Дунай	35 » » »
Нил	106 » » »
Хоанхо	472 » » »

Как известно, достигая моря, вода рек теряет свою скорость, отлагает у устья своего огромные толщи осадков, которые дают начало речным дельтам, мелям или банками, песчаным откосам и пр. Прибой и морские течения будут затем разносить эти осадки вдоль берега. Для характеристики

этой роли рек важно учесть, что могучие реки уносят свой ил далеко в море, так что мутные воды Амазонки можно различить еще в 2500 км от устья реки в Атлантическом океане. И это при том еще условии, что соленая вода способствует быстрому оседанию мелкой мути. Если бы у растворов солей не было этой способности содействовать осаждению мути, то мелкий речной ил разносился бы морскими течениями по всему дну океанов. На деле же он отмечается, главным образом, вблизи берегов.

На этом мы можем оставить реки и вернуться к геосинклиналям.

Из предыдущего мы знаем, что в некоторых случаях сами дельты былых рек оказываются геосинклиналями. Пример нам дают, повидимому, Донецкий и Кузнецкий бассейны; в других — течения и прибои распространяют осадки на более далекие пространства, правильным образом распространяя их по данному бассейну. Говоря о бассейне, я имею в виду бассейн того типа, какой мы находим у подножья горных хребтов разных эпох. Сказанное выше определяет, что именно следует понимать под геосинклиналями. Ясно совершенно, что старое определение этого термина, данное Огом, не верно: ни Атлантический океан, ни Западная впадина, ни Мозамбикский пролив под понятие геосинклинали не подходят. Они не подходят прежде всего потому, что максимальное накопление осадков происходит в прибрежных областях, в центре же океанов и в глубоких впадинах никакого накопления осадков нет.[1] Этот вывод — простое следствие того, что нами сказано выше о процессе отложения реками своих осадков в морях. Мы приходим таким образом к выводу в сущности не новому в литературе,[2] что многое в трактовке геосинклиналей, данной Э. Огом, не годится, и в частности неправильны направления его поисков современных геосинклиналей.

Несмотря на явную устарелость трактовки данного вопроса Огом с точки зрения современного состояния наших познаний, у него все же и сейчас можно взять по данному вопросу много ценного. Так, напр., он совершенно прав в своем указании, что геосинклиналь располагается непосредственно рядом с горной цепью, сформировавшейся в предыдущий период.[3] Однако, тут же называет геосинклиналь «глубоким морем», что

[1] Ср. Д. Наливкин. Учение о фациях, стр. 31.

[2] Ср. C. Schuchert. Sites and nature of the north-americ. geosynclines. Bull. Geol. soc. of Amer. vol, 34, 1923; — А. Борисяк. Теория геосинклиналей, стр. 7 и др.; — В. А. Обручев Новые течения в тектонике. Изв. Геол. ком., 1926, т. XIV, № 3, стр. 117 и сл.; — Bubnoff. Die Gliederung der Erdrinde, Berlin, 1923, pp. 25—27. — Dacque. Grundlagen und Methoden der Palaeogeographie. Jena, 1915, pp. 120—121; — Д. В. Наливкин. Учение о фациях, стр. 29—35.

[3] Haug. Traité de géologie, t. 2, p. 165

ошибочно. Равным образом на следующей странице Ог говорит, что геосинклинали представляют «подвижные зоны, зажатые между двумя относительно неподвижными материками».[1] С этим тоже можно вполне согласиться. Несмотря на ряд весьма ценных мыслей Ога по данному вопросу, в самые основы его воззрений надо внести существенные поправки.

В противоположность его взгляду о том, что в геосинклиналях развиты батиальные и даже абиссальные отложения, факты говорят о том, что здесь имеются по преимуществу даже в центральных частях прибрежные осадки, батиальные же и абиссальные почти совсем неизвестны. Гораздо ближе к истине американские геологи, в частности Шухерт, которые приурочивали образование геосинклиналей — впадин с глубоким погружением к краю возвышенных горных материков, причем нередко такая впадина с прогибом ее дна лежит между материком и краевой землей (Borderland), имеющей вид довольно широкой нагорной страны и отделяющей геосинклиналь от океана. Именно это представление о геосинклиналях вполне согласуется с развитым нами в предыдущем изложении представлением о роли рек в приносе в моря терригеновых материалов. Здесь важно отметить следующее. Э. Ог на основании материала, имевшегося в то время, когда он писал свой курс и известную свою работу о геосинклиналях, формулировал мысль, что пять основных континентальных площадей существовали уже с эпохи палеозоя, хотя имели минимальные размеры.[2] О чем это говорит? Об известной, правда очень относительной, устойчивости материков в течение доступного нашему изучению геологического времени. Значит ли это, что материки вообще устойчивы и, даже больше, постоянны в своих очертаниях? Конечно, нет! Речь идет не о принципе постоянства, который давно сдан в архив истории[3], а о факте известной устойчивости[4] в течение вполне конкретного времени.[5]

[1] Ibid, p. 166.

[2] Haug. Op. cit., p. 168.

[3] Я не могу не отметить с этой точки зрения довольно смелого искажения моих взглядов в статье В. М. Букановского «К вопросу о диалектике развития земли». Сборн. «За марксистско-ленинскую перестройку геологоразведочных наук». М.—Лгр., 1932, стр. 73—74.

[4] Не совсем точно было применение в этом смысле термина «постоянство», что могло ввести в заблуждение критиков и читателей, мало компетентных, ибо им трудно было понять, что речь идет о постоянстве относительном, устойчивости на некоторый срок. См. мои статьи, где в этом смысле я применял термин «постоянство»: Новые течения в геологической науке, Лгр., 1929, стр. 23 и сл; Климаты прошлого земли и перемещение материков. Природа, 1929, № 7—8.

[5] См. Б. Л. Личков. Движения материков и климаты прошлого земли. Лгр, 1931, стр. 49—50 и др.

Заканчивая этим свой анализ данного вопроса о связи геосинклиналей с древними аллювиальными равнинами, я позволю себе закончить тем, с чего я начал. Я вернусь к мнению А. А. Борисяка о том, что в современную эпоху геосинклиналей нет и больше их на земле как будто и не будет. Это мнение не верно, как я указал, во второй своей части; в первой же части этого мнения есть частичная истина: геосинклинали сейчас только закладываются и они поэтому не очень видны. В связи с этим встает однако такой вопрос: где же искать современные геосинклинали, где они закладываются? Очевидно, для их образования, соответственно всему изложенному выше, нужны два условия: вынос реками в моря достаточного количества осадков и одновременно происходящий прогиб дна, чтобы эти осадки могли аккумулироваться в значительные толщи. Имеются ли такие места в современных морях? Не вникая в вопрос более детально, я думаю, можно предположительно назвать в виде примера Адриатику, Средиземное море, восточную а, м. б., и западную часть Черного моря, Эгейское море, быть может Каспий. Всюду здесь имеются и накопление осадков в связи с приносом их реками и опускательные движения в зоне современных горообразовательных процессов. Если это наше указание мест современных геосинклиналей верно, то очевидно, что современные, скрытые пока геосинклинали представляют продолжение той миграции геосинклиналей, которая в доступное нам геологически время происходила с севера на юг на территории Европы, причем дифференцированнее для разных эпох этот процесс был выражен в западной части данного материка. На этом мы закончим наше изложение.

Основные выводы наши следующие:

1) Определенная хронологическая связь заложения геосинклиналей с эпохами образования великих аллювиальных равнин.

2) Терригеновый характер геосинклинальных отложений и, следовательно, превалирующее участие рек в приносе их отложений.

3) Наступление полного развития геосинклиналей с некоторым запозданием после эпох оледенений связи их с тем размывом суши, который начат был в эпохи поднятия, предшествующие оледенениям.

Геоморфологический Институт Акад. Наук.
15 IV 1932.

Оглавление — Sommaire

	стр.
*В. С. Игнатовский. Распространение возмущений в неоднородной изотропной среде (с 13 фиг. и резюме на русском языке)	857
Н. И. Мусхелишвили. К задаче кручения и изгиба упругих брусьев, составленных из различных материалов (с 8 фиг.)	907
*Н. Михальский. Орбита малой планеты Нестор по наблюдениям за 1908—1919 годы (с резюме на русском яз.)	947
А. Г. Воробьев. Определение скорости воздушного судна при повороте (с 8 фиг.)	981
В. А. Кистяковский и П. Д. Данков. К вопросу об электрокристаллизации металлов. Статья вторая (с 2 табл.)	993
Б. Л. Личков. Геосинклинали и великие наземные аллювиальные равнины (с 4 фиг.)	997

	pag.
V. Ignatovskij (W. v. Ignatowsky). Fortpflanzung von Störungen in inhomogenen isotropen Medien (mit 13 Fig. und einem russischen Résumé)	857
*N. Muskhelišvili (N. Mouskhelichvili). Sur le problème de torsion et de flexion des poutres élastiques composées (avec 3 fig.)	907
N. Michalskij (N. Mikhalsky). The orbit of the planet 659 Nestor from the observations in the years 1908—1919 (with a Russian résumé)	947
*A. Vorobiov. Détermination de la vitesse des dirigeables pendant le virage (avec 8 fig.)	981
*V. Kistiakovskij (W. Kistiakowsky) et P. Dankov. Sur l'électrocristallisation des métaux. Deuxième article (avec 2 planches)	993
*B. Ličkov (B. Litschkov). Les géosynclinaux et les grandes plaines alluviales de la terre ferme (avec 4 fig.)	997

Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала.

Le titre maqué d'un astérisque est une traduction du titre original.

Цена 3 руб.